

Федеральная целевая программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» 2009-2013 гг., направление "Математика", мероприятие 1.2.1. Соглашение № 8213 от 06.08.2012 г.

## Научно-популярный курс

«Что такое турбулентность»

О.В. Трошкин

### Содержание курса

Очерки	Темы	Лекции	Стр.
1.	Снег и вода.	1	2
2.	Сила А.		3
3.	Сила В.	2	6
4.	Сила С.		7
5.	Проблема четырех задач.	3	9
6.	Пятая задача.		12
7.	Вода и волчок.	4	13
8.	3D–неустойчивости.	5	14
9.	Аналогия с юлой	6	17

*Памяти  
действительного члена  
Академии наук СССР  
Владимира Игоревича  
Арнольда*

*“Raffiniert ist der Herrgott,  
aber boshaft ist er nicht”  
(«Господь изощрен,  
но не злонамерен»)  
– А. Эйнштейн, запись на камине.*

## Очерк 1. Снег и вода.

Следуя прежнему курсу «Что такое гидродинамическая устойчивость», вновь затронем тему драгоценных металлов. Пословица остерегает: не все золото, что блестит. Она же может быть отнесена и к внешне схожим, но физически различным явлениям.

Например, математику из Википедии, пытающемуся провести аналогию турбулентности водного потока с беспорядочностью снежной лавины, если его действительно накроет последней, увы, самому не выбраться из ее глубины на поверхность, как из воды.

И все потому, потому что у снега нет выталкивающей силы  $A$ , какая есть у воды. Эту силу непременно учитывает в своих *законах сохранения* та часть *физики*, или науки о силах, которая обычно называется *механикой сплошных сред* (иногда – гидродинамикой, еще реже – гидравликой). Свод этих законов записывается в форме классических уравнений неразрывности, импульса и энергии. Он же дополняется другими физическими силами и химическими реакциями. Посвященный ему раздел *математической физики*, т.е. науки об уравнениях физики, называют *математической гидродинамикой*. В суждениях о турбулентности хорошим тоном будет придерживаться понятий именно этого раздела. К ним мы и переходим, оставляя интернету его дискуссии о «турбулентции», или хаотичности движений вне рамок упомянутых законов.

Итак, в многообразии окружающих нас *текучих масс* различаются *сыпучие материалы* (зерно, мука, снег, песок,...) и *сплошные среды* (вода, воздух, масло, мед,...). Первые подчиняются своим законам движения. Не касаясь их, обратимся ко вторым, которые и отличает от

первых ежесекундно оказываемое ими действие на любой свой объем через его границу в виде выталкивающей силы  $\mathbf{A}$ .

Пропуская интуитивно достаточно очевидный закон сохранения массы и далеко не очевидный (и требующий отдельного рассмотрения) закон сохранения энергии (как суммы механической и внутренней энергий) из упомянутого свода, остановимся на сохранении импульса, а лучше сказать, на *равновесии импульсов*, существенно учитывающем эту силу для переносимого и деформируемого средой ее объема.

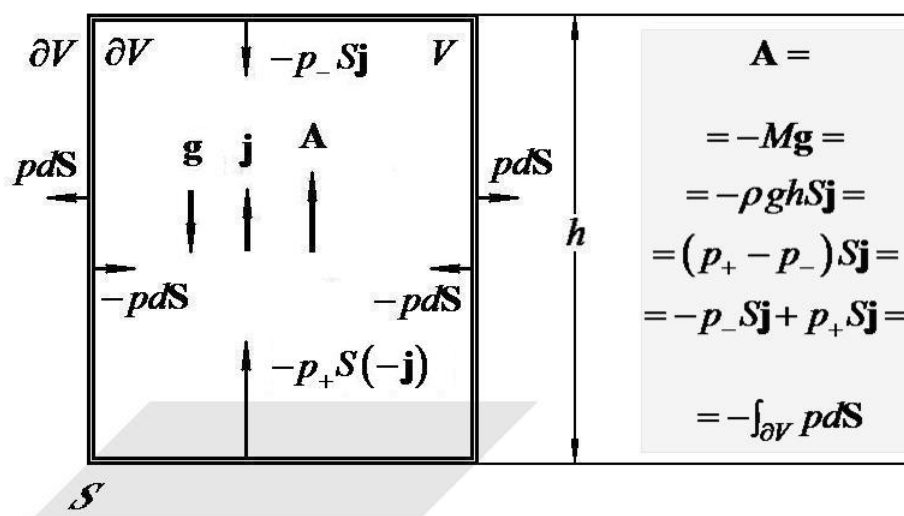
Но сначала познакомимся с самой силой  $\mathbf{A}$  несколько ближе, чем это принято обычно.

## Очерк 2. Сила $\mathbf{A}$ .

Приблизим малую часть поверхности  $\partial V$  объема  $V$  плоской площадкой, которая, касаясь поверхности  $\partial V$  в ее наугад выбранной точке, равна по площади этой малой части. Выпустим из этой точки за пределы данного объема нормально площадке стрелку (вектор) длины 1, или единичную *внешнюю нормаль*. Взяв ее в пропорции площади площадки, получим так называемый *вектор площади*  $d\mathbf{S}$ , равный по величине площади выделенной площадки.

Согласно *закону Паскаля* молекулы объема  $V$  давят изнутри на малую площадь границы  $\partial V$  в выбранной точке с силой, равной вектору площади  $d\mathbf{S}$ , взятому в пропорции  $p d\mathbf{S}$  *давления* среды  $p > 0$ . По третьему закону Ньютона молекулы окружающей среды отвечают им *обратным действием* в пропорции  $-p d\mathbf{S}$  той же величины, но взятой с обратным знаком, безотносительно к ориентации площади в пространстве. Суммой  $-\int_{\partial V} p d\mathbf{S}$  обратных сил  $-p d\mathbf{S}$  (с коэффициентами  $-p$ ) по поверхности объема и определяется основная, или *выталкивающая сила*  $\mathbf{A}$  сплошной среды (см. Рисунок 1).

Она и составила исторически *первое уравнение* механики сплошных сред (*закон Архимеда*), но долгое время оставалась загадкой. И только вместе с законом Паскаля стало понятно, что погруженное в среду твердое тело, вытесняя ее объем, вместе с ним удаляет и его молекулярное давление  $p$ , производящее *силу реакции*  $-\mathbf{A} = \int_{\partial V} p d\mathbf{S}$  (с положительным давлением  $p$ ), которая уравнивает выталкивающую силу  $\mathbf{A} = -\int_{\partial V} p d\mathbf{S}$  окружающей среды (с отрицательным давлением  $-p$ ). Погруженное тело испытывает на себе только действие последней,  $\mathbf{A}$ , не отвечая на него действием первой,  $-\mathbf{A}$ . Сводящаяся к разности наибольшего и наименьшего давлений на поверхности тела,  $p_+$  и  $p_-$ , сила  $\mathbf{A}$  и выталкивает его в сторону *наименьшего давления*  $p_-$  (см. Рисунок 1).



**Рисунок. 1.** В поле  $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$  земного ускорения  $g$  сила Архимеда  $\mathbf{A}$  уменьшает вес вертикального бруска  $V$  высоты  $h$  и площади  $S$  на вектор  $M\mathbf{g}$  веса  $Mg$  воздуха плотности  $\rho$ , вытесненного бруском. Паскаль нашел ее равной сумме  $-\int_{\partial V} p d\mathbf{S}$  элементов поверхностных сил  $-pd\mathbf{S}$  атмосферного давления  $p$  на границе бруска  $\partial V$  и измеряемой барометром Торричелли по разности  $\rho gh$  нижнего (большого) и верхнего (меньшего) давлений  $p_+$  и  $p_-$ .

Выталкивающую силу можно создать искусственно, движением тела в среде, в виде *подъемной силы Жуковского*  $\mathbf{A}$ . Для этого

достаточно сконструировать *крыло* с продуманной *геометрией*, и разогнать его на земле до скорости, достаточной, чтобы возникающая при этом разность давлений  $p_+ - p_-$  подняла в воздух вместе с крылом и самолет.

В ином образе является эта сила при движении самой среды, например, при ее вращении. В последнем случае сплошная среда всегда следует правилу, на которое будем ссылаться как на *закон вихря*: возникающее от ее вращения *локальное* (или местное) давление всегда падает к центру вихря.

Только благодаря этому закону и возможно разделение изотопов урана в его газовой смеси, раскручиваемой ротором (цилиндром) *промышленной центрифуги*, где сила  $\mathbf{A}$  выталкивает легкие «тела» (молекулы смеси) к оси вращения скорее более тяжелых «тел».

Закон вихря альтернативно дополняет исторически *второе уравнение* механики жидкости газа, относящееся к *интегралу* петербургского академика Даниила Бернулли, то есть к сумме  $p/\rho + \mathbf{u}^2/2$  отношения давления  $p$  к плотности  $\rho$  и половины  $\mathbf{u}^2/2$  скалярного квадрата  $\mathbf{u}^2$  скорости  $\mathbf{u}$ : согласно этому уравнению она сохраняется при *поступательном* движении среды. При *вращательном* движении и постоянной плотности  $\rho$  оба слагаемых интеграла Бернулли понижаются к центру вихря, и он уже не сохраняется.

Объединить интеграл Бернулли и закон вихря удалось другому петербургскому академику Леонарду Эйлеру в полученном им к 1757 году векторном *уравнении импульса*, исторически *третьем уравнении* механики сплошной среды. Для этого Эйлер просто добавил выталкивающую силу  $\mathbf{A}$  к заданным внешним (или, как говорят, *массовым*) силам в правую часть записанного им для малых объемов среды (или для «телец», как он их называл) того центрального

уравнения динамики (второго закона Ньютона), которое к тому времени уже было известного для поступательного движения твердых тел.

С основного закона динамики, учитывающего выталкивающую силу  $\mathbf{A}$  в равновесии импульсов каждого объема среды, т.е. с равносильных этому векторному равновесию трех *гидродинамических уравнений Эйлера*, по существу и начинается математическая гидродинамика.

## Лекция 2

### Очерк 3. Сила $\mathbf{B}$ .

Измерения силы  $\mathbf{A}$  в воде (Архимедом между 287 и 212 годами до нашей эры) и в воздухе (Торричелли и Вивiani в 1644 году) разделяет 19 веков. Через 4 года после последнего измерения последовало объяснение силы  $\mathbf{A}$  (Паскалем, в 1648 году). Спустя еще 39 лет пришла и первая поправка к новой силе. В 1687 году Ньютон записывает простую *формулу внутреннего трения*, в которой он вводит механическую причину отличия воды от меда – *коэффициент динамической вязкости среды*  $\mu > 0$ . Теперь уже можно различать менее и более вязкие среды меньшими и большими значениями коэффициента  $\mu$ , соответственно.

В 1828 году Навье переносит формулу Ньютона на *несжимаемые* среды (воду, масло, мед,...). И, наконец, в 1845 году Стокс завершает классическую часть математической гидродинамики общей формулой для силы  $\mathbf{B}$ , которую следует добавить к силе  $\mathbf{A}$ , чтобы учесть и вязкость *сжимаемой* среды (например, воздуха).

С появлением силы  $\mathbf{B}$  нормальная сила молекулярного давления, составляющая единственный элемент силы  $\mathbf{A}$ , дополнилась двумя касательными элементами, сжимающими или растягивающими малую

площадку вектора площади по двум ортогональным направлениям. Величины сил, приложенных к площадке, отнесенные к ее площади, стали называть *напряжениями среды* и различать среди них одно *нормальное* напряжение, толкающее площадку (с повышением или понижением давления  $p$  на величину пропорции скорости расширения или сжатия среды) и два *касательных* напряжения, растягивающих или сжимающих площадку тем сильнее, чем больше вязкость, измеряемая коэффициентом  $\mu$ .

#### Очерк 4. Сила С.

Между тем, среды с малой вязкостью часто склонны к *локальной активности*, выраженной их способностью производить в любом своем объеме какое угодно число осей вихрей, или вихревых нитей. *Ось вихря*, или *вихревая нить* – это гладкая кривая в пространстве, каждая точка которой при ортогональной проекции на подходящую плоскость оказывается центром *плоского вихря*. Последний рисуется на бумаге семейством концентрических окружностей для несжимаемой жидкости или одной спиралью для сжимаемого газа.

Как следствие локальной активности, в пределе исчезающей вязкости получается *идеальная* (невязкая), но *мелко пульсирующая* среда как допускающая в малом объеме большое число вихревых нитей. Объем при этом может перемещаться в пространстве, как целое, со средней скоростью своего *геометрического центра* как центра масс при неизменной плотности.

Скорость частицы пульсирующей среды тогда естественно представить ее *мгновенной скоростью*  $\mathbf{u}$  и разложить в сумму *средней скорости*  $\bar{\mathbf{u}}$  окружающего частицу выделенного объема, или скорости его геометрического центра, и *пульсации*  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$  как скорости без «среднего»:  $\overline{\mathbf{u}'} = \mathbf{0}$  ( $\bar{\bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{u}}$ ).

Подставив разложение  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$  мгновенной скорости  $\mathbf{u}$  на среднюю скорость  $\bar{\mathbf{u}}$  и пульсацию  $\mathbf{u}'$  в уравнения Эйлера и усреднив их (как скорость, по объему), Кельвин (Уильям Томсон) в 1887 году получил те же уравнения, но с шестью новыми напряжениями, дополняющими давление Паскаля  $p$  и впоследствии названными *турбулентными*. Их составили произведения плотности  $\rho$  и *корреляций скорости*  $\overline{u'u'}$ ,  $\overline{u'v'}$ , ... (средних величин парных произведений пульсаций компонент скорости).

Корреляции Кельвина  $\overline{u'u'}$ ,  $\overline{u'v'}$ , ... теперь определяют опытным путем, при помощи различного типа *анемометров*, показаниями которых непосредственно и измеряются пульсации  $u', v', w'$  в малых объемах среды.

При этом только *отсутствие* или *наличие* измеряемых сил (напряжений)  $\overline{\rho u'u'}$ ,  $\overline{\rho u'v'}$ , ... пульсаций (а не сами пульсации, которые могут быть и лишены этих сил) и может свидетельствовать о том, является ли данная среда *ламинарной* или *турбулентной*, соответственно.

Они же составляют новую «добавку»  $\mathbf{C}$  к силе  $\mathbf{A}$  в турбулентной среде, которую спустя 7 лет после Кельвина вывел и Рейнольдс, точно также, как и Кельвин, усреднив уже не уравнения Эйлера (с силой  $\mathbf{A}$ ), а уравнения Навье–Стокса (с силой  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ).

Таким образом, покоящаяся сплошная среда неизменно производит силу  $\mathbf{A}$ , которая остается единственной и для подвижной невязкой и ламинарной среды (*уравнения Эйлера*). Вязкая и ламинарная подвижная среда производит силу  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  (*уравнения Навье–Стокса*), невязкая и турбулентная – силу  $\mathbf{A} + \mathbf{C}$  (*уравнения Кельвина*), наконец, вязкая и турбулентная – силу  $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$  (*уравнения Рейнольдса*).



Вот и вся азбука математической гидродинамики. Она достаточно понятна, кроме одного: откуда среда берет свою локальную активность, приводящую к силе  $C$ , т.е. к *турбулентности*?

Для ответа на поставленный вопрос прежде всего обратимся к самому началу той значительной части математической гидродинамики, которая, собственно, и занимается поисками ответа на него, т.е. к истокам теории гидродинамической устойчивости.

### Лекция 3

#### Очерк 5. Проблема четырех задач.

Независимо от уравнений гидродинамики, в 1839 немецкий инженер Людвиг Хаген открывает *закон водопровода*: секундный расход прогоняемой по трубе жидкости пропорционален разности давлений на ее концах. Годом позже французский врач Пуазейль уточняет коэффициент в этом законе четвертой степенью диаметра капилляра (трубы). Через шесть лет ирландский математик Стокс получает параболоид для профиля скорости Пуазейля в трубе и его параболу в плоском канале (с параллельными стенками) вместе с точным коэффициентом в исходном законе, который оказывается обратно пропорциональным вязкости среды  $\mu$ .

В 1883 году британский механик Рейнольдс наталкивается на систематическое искажение параболоида скорости в трубе, обусловленное увиденным им в вспышках света спонтанным возникновением вихрей. Он пытается объяснить это явление большой величиной какого-то параметра, перебирает его возможные варианты и, наконец, останавливается на носящем теперь его имя *числе*  $Re = c\rho U/\mu$  как отношении произведения радиуса трубы  $c$ , плотности среды  $\rho$  и средней скорости  $U$  к коэффициенту динамической вязкости  $\mu$ , заключая: «Как представляется определенным, если вихри и

обусловлены какой-то особой причиной, то интегрирование [уравнений Навье–Стокса – О.Т.] должно привести к зависимости [условия – О.Т.] рождения вихрей от конкретной величины [параметра – О.Т.]  $c\rho U/\mu$ » (см. Рисунок 2).

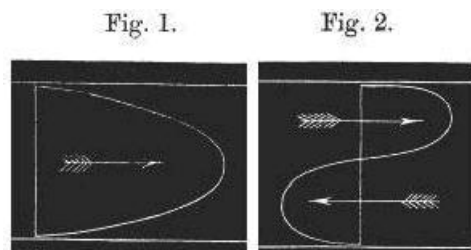
It seemed, however, to be certain, if the eddies were owing to one particular cause, that integration would show the birth of eddies to depend upon some definite value of—

$$\frac{c\rho U}{\mu}$$

**Рисунок 2.** Так был угадано число Re.

Эту «особую причину» Рейнольдса теперь называют *гидродинамической неустойчивостью*.

Желая ее понять, Рейнольдс тут же оставляет свое число и обращается к простой геометрической аналогии: он *мысленно* заменяет пространство трубы на плоскость канала. Он почти уверен в устойчивости плоского параболического профиля и неустойчивости профиля синусоидального (*синус-профиля*), придуманного им как альтернатива параболе, замечая при этом, что «для движения воды в одном направлении, когда скорость максимальна в середине канала и уменьшается до нуля на стенках, как показывает кривая на fig.1, вихри возникают неохотно и случайно; когда же вода на одной стороне канала движется против ее течения на другой стороне, как изображено кривой на fig.2, вихри в середине канала появляются легко и постоянно» (см. Рисунок 3).



**Рисунок 3.** Параболический и синусоидальный профили руки Рейнольдса.

Вскоре к этим двум профилям примкнули два других контура скорости в бесконечном периодическом канале: линейный профиль Куэтта и выпуклый профиль Рэлея. Выбор последнего естественно ограничить здесь произвольным, но параболическим профилем скорости в канале, стенки которого допускают продольные смещения с постоянными скоростями.

Так возникла *проблема четырех задач*, или вопрос об устойчивости (1) линейного *профиля Куэтта*, (2) симметричного параболического *профиля Пуазейля*, (3) произвольного параболического *профиля Рэлея* и (4) синусоидального *профиля Рейнольдса* – простейших основных (невозмущенных) течений в бесконечном периодическом канале с параллельными стенками, допускающими смещение с постоянными скоростями.

Эта проблема рассматривается обычно при *условиях непротекания* (когда стенки непроницаемы для среды) или *прилипания* (когда среда не проскальзывает вдоль непроницаемых стенок), для бесконечно малых (при *линейной устойчивости*) или произвольно больших (при *нелинейной устойчивости*) возмущений основного профиля как начального поля скоростей. При этом исследуются как ограниченные числа Рейнольдса (*локальная устойчивость*), так и неограниченные числа  $Re$  (*глобальная устойчивость*, включая предел *идеальной среды*), а в последнем случае – как ограниченный снизу *фактор канала*, равный отношению ширины канала к его периоду (*условная глобальная устойчивость*), так и неограниченный снизу фактор (*безусловная глобальная устойчивость*).

Вопрос же о безусловной глобальной и нелинейной устойчивости для второго из вышеупомянутых течений, плоского профиля Пуазейля в периодическом канале с условиями прилипания, стал «вопросом века» в

математической гидродинамике, и для него принимался только один ответ: да или нет.

### **Очерк 6. Пятая задача.**

Последний вопрос был все-таки решен положительным «да», но, как и обычно, к его решению теория шла окольными путями. Вот как это было.

В середине прошлого века к проблеме четырех задач добавилась и пятая – *задача Колмогорова* об устойчивости синус-профиля Рейнольдса, когда условия прилипания на стеках канала уступают место условиям периодического продолжения канала на всю плоскость, или когда рассматривается канал с *периодическими стенками*.

Однако первые три задачи наотрез отказались принимать ее в свою проблему по той причине, что с ее появлением четвертый профиль, рекомендованный самим Рейнольдсом первым кандидатом в неустойчивые течения, вопреки ожиданиям, оказался устойчивым: сначала линейно, а затем и нелинейно и даже глобально, в канале с периодическими стенками и при факторе, большем 1, что подтвердили последовавшие натурные и численные эксперименты.

Наконец, при прежнем ограничении на фактор он окончательно стал нелинейно, глобально и условно устойчивым профилем уже и для исходных условий прилипания на стенках канала.

Точная оценка нижнего предела значений фактора канала, обеспечивающих устойчивость синус-профиля при этом опустилась с 1 для периодических стенок до величины, несколько меньшей 0.59300, но большей 0.59293, для условий прилипания.

## Лекция 4

## Очерк 7. Вода и волчок.

Причиной метаморфозы синус–профиля Рейнольдса оказалась хотя и строго обоснованная, но сугубо формальная (алгебраическая), не вполне привычная (нелинейная) и даже неожиданная (если не шокирующая) *аналогия*, обнаруживаемая между *основными течениями* в канале и *вращениями* привычно закручиваемой ребром или плоскостью монеты на столе (см. Рисунок 4). Ее подробности отнесем к заключительной лекции. Остановимся на ее механике.



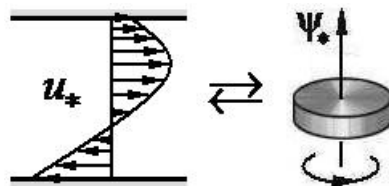
**Рисунок 4.** Нейтральное (верхнее) и нормальное (нижнее) вращения монеты.

Алгебраически, *структура* законов сохранения действительно такова, что плоскопараллельному *течению воды в канале отвечает вращение волчка* (или юлы), а именно: (1) секунднему расходу жидкости, или функции тока – угловая скорость вращения волчка, (2) завихренности (переменной угловой скорости) поля скоростей, направленной нормально плоскости течения – его кинетический момент, (3) векторному произведению векторов завихренности и скорости – такое же произведение векторов угловой скорости и кинетического момента, (4) гидродинамическим уравнениям Эйлера (возможно, дополненным вязкими напряжениями, или уравнениям Навье–Стокса) – динамические уравнения Эйлера (возможно, дополненные моментом сил

трения, пропорциональным кинетическому моменту волчка на вращениях вокруг его главных осей инерции), и, наконец, (5) устойчивости основного течения в канале – устойчивость главного вращения волчка вокруг наименьшей или наибольшей оси эллипсоида инерции в известной *теореме Эйлера*.

Согласно последней, монета на столе может устойчиво вращаться плоскостью или ребром (Рисунок 4). Устойчивость четвертого течения (синус–профиля) при этом аналогична устойчивости ее вращения ребром (*нейтральное* вращение на Рисунке 4).

Беспокойства же трех первых течений по этому поводу оказались не напрасны: их все–таки постигла участь четвертого течения. Но судьбу их решила уже другая монета, вращающаяся не ребром, а плоскостью, т.е. нормально, как детская юла (Рисунок 4). Словом, все три течения оказались нелинейно, глобально и безусловно (при любом факторе) устойчивыми, как *нормальное* вращение юлы (см. Рисунок 5).



**Рисунок 5.** Течение с параболическим профилем скорости  $u_*$  в плоском канале устойчиво по отношению к его произвольным двумерным начальным возмущениям и отвечает нормальному вращению юлы с угловой скоростью  $\psi_*$ .

## Лекция 5

### Очерк 8. 3D–неустойчивости.

Вернемся, однако, к силе Кельвина  $C$  как основному признаку турбулентности. Точного механизма ее возникновения пока никто не знает (еще не «перебраны» все «гайки и болты» упомянутой «особой

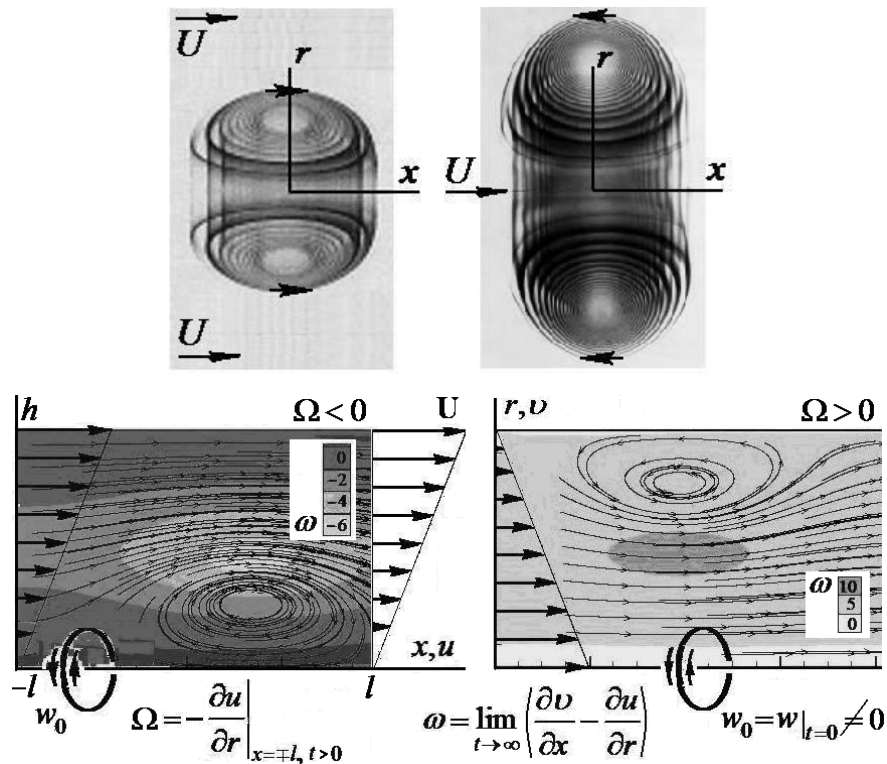
причины» Рейнольдса, то есть вихри как элементы гидродинамической неустойчивости). Поэтому мы можем только уточнить относящийся к нему основной вопрос из предыдущего курса: *почему течению «выгоднее» свернуться в рулон (вихрь) при больших числах  $Re$ ?*

Зато мы уже знаем из решения проблемы четырех задач, что вихри, доставляющие турбулентность, не могут возникнуть вследствие *2D-возмущений* (двумерных возмущений) ни при каких условиях, по меньшей мере, для первых трех течений этой проблемы, и при ограниченном снизу факторе канала (или, как говорят физики, для коротковолновых возмущений) для четвертого.

Другими словами, турбулентность оказывается существенно трехмерной, т.е. *3D-неустойчивостью* (точнее, пределом последовательности таких неустойчивостей по времени), как на Рисунках 7 и 8, где первые вихри еще двумерны (как вихревые трубки).

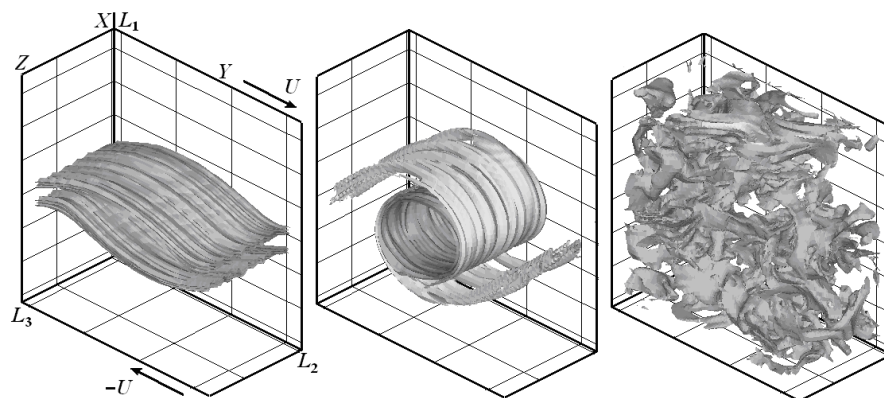
На Рисунке 6 эти вихри уже трехмерны. И пока единственны. Это – вихревые шар или кольцо, возникающие в продольном осесимметричном дозвуковом потоке нормального идеального газа в трубе, когда в пренебрежении влиянием вязкости и стенок течение «возмущается» начальными полем скоростей и «закручивается» на концах трубы.

Их возникновение «напрямую» промоделировал В.В. Денисенко дополнительной закруткой потока на торцах трубы, поддерживаемой в течении всего времени численного эксперимента, пока не установится стационарное вторичное течение. Как видно на Рисунке 6, этим течением действительно оказывается трехмерный вихрь. Его форма не зависит от величины и знака закрутки, но обязана своим происхождением исключительно *понижению* или *повышению скорости* основного (невозмущенного) течения к его *центральной оси*, приводящему соответственно к *шару* или *кольцу*.



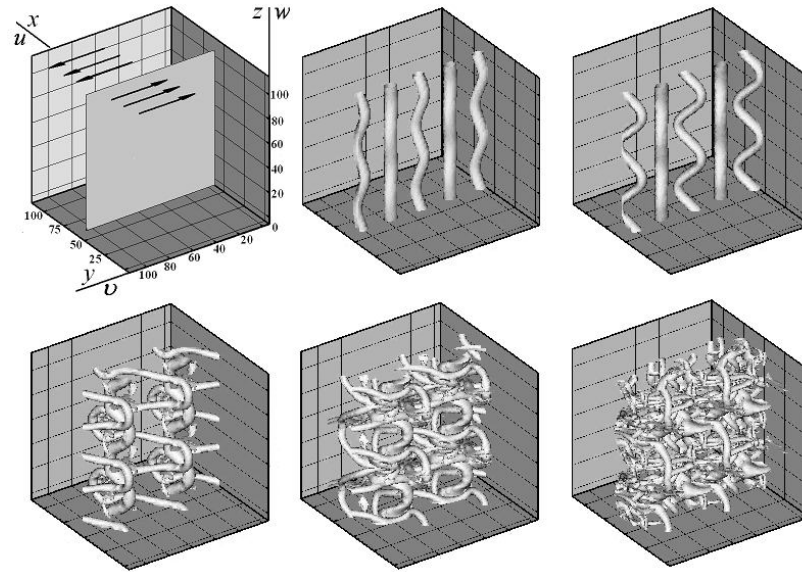
**Рисунок. 6.** В верхней части – моделируемые вихри, в нижней – результат В.В. Денисенко: вызванное начальной закруткой – азимутальной скоростью  $w_0$  (закруткой) произвольного знака ( $\mp w_0 > 0$ ) – установление шарового или кольцевого вихря, с предельной завихренностью  $\omega$  того же знака, что и завихренность  $\Omega < 0$  (или  $\Omega > 0$ , соответственно) невозмущенного осесимметричного потока  $U$ , поддерживаемая на концах цилиндрической трубы.

Возможно, развитие этой неустойчивости приведет к вихревым каскадам С.В. Фортовой (Рисунок 7) и А.В. Конюхова (Рисунок 8), рассмотренным в предыдущем курсе.



**Рисунок. 7.** Вихревой каскад С.В. Фортовой.





**Рисунок 8.** Вихревой каскад А.В. Конюхова.

Вполне возможно и обратное. Исследования продолжаются...

## Лекция 6

### Очерк 9. Аналогия с юлой.

Коснемся и работы, где точно изложена упомянутая аналогия между течениями вязкой несжимаемой жидкости и вращениями волчка с трением. К синус-профилю Рейнольдса непосредственно относится ее 5-й пример («течение в кольце»). Полученные в ней оценки *глобальной и нелинейной единственности* автоматически (при переходе к нестационарным течениям) становятся оценками *глобальной и нелинейной устойчивости* (что отмечается в тексте). Введенные в работе (и составляющие основу указанной аналогии) *алгебры* с согласованными коммутатором и скалярным произведением впоследствии были названы *квазикompактными*.

Итак, Доклады АН СССР, 1988, Т. 298, № 6, С. 1372–1376:

О.В. ТРОШКИН

**АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА  
ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА  
И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ**

(Представлено академиком А.А. Дородницыным 26 I 1987)

§ 1. Система стационарных уравнений Навье–Стокса для плоскопараллельного установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости в предположении существования однозначной функции тока  $\psi = \psi(x, y)$  может быть приведена к одному скалярному уравнению для функции  $\psi$ , записываемому в безразмерных величинах как [1]

$$(1) \quad \frac{1}{\text{Re}} \Delta^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = f(x, y), \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Здесь  $f = f(x, y)$  – заданная "перемешивающая сила",  $\text{Re} = \text{const} > 0$  – число Рейнольдса [1]. Уравнение (1) напоминает векторную запись системы из трех алгебраических уравнений

$$(2) \quad \epsilon \omega + \omega \times A \omega = \zeta,$$

задающей компоненты скорости  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  установившегося вращения твердого тела, испытывающего дополнительное действие момента сил трения  $\zeta \omega = -\epsilon \omega$ ,  $\epsilon = \text{const} > 0$ , так называемого диссипативного волчка. Здесь  $\zeta$  – вектор момента внешних сил, крест – векторное умножение,  $A$  – диагональная матрица "главных моментов инерции":  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ,  $\lambda_1 > 0$  [2]. Соответствующие нестационарные уравнения формально получаются добавлением в левые части равенств (1) и (2)

производных по времени:  $\frac{\partial}{\partial t} (-\Delta \psi)$  и  $\frac{d}{dt} A \omega$ .

Аналогия, существующая между гидродинамическими уравнениями и уравнениями волчка, подмечена в работе [3]. В статье [4] рассмотрен гидродинамический вариант известной теоремы Эйлера об устойчивости установившегося вращения недиссипативного волчка ( $\epsilon = 0$ ) вокруг его "наименьшей" или "наибольшей" осей инерции, задаваемых собственными векторами матрицы  $A$ , отвечающими ее наименьшему или наибольшему собственным числам  $\lambda_1$  или  $\lambda_3$  [2]. Непосредственно к указанной теореме примыкает следующий результат, касающийся диссипативного волчка [5]:

*Если момент внешних сил  $\zeta$  направлен вдоль одной из экстремальных осей инерции, то при любых  $\epsilon$ ,  $|\zeta| = (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2)^{1/2} > 0$  единственным решением уравнения (2) служит вектор  $\omega = \epsilon^{-1} \zeta$ , асимптотически устойчивый в целом, как положение равновесия соответствующей нестационарной системы. Целью проводимых ниже построений является получение гидродинамических аналогов сформулированного результата, касающихся ряда однородных граничных задач для уравнения (1) (приведенных в § 3), глобализирующих утверждение локальной теоремы единственности [6].*

§ 2. Предварительно изложим теоретико-функциональную схему получения упомянутых нелокальных теорем. Пусть  $\mathcal{M} = \{ \dots, x, y, u, v, \dots \}$  – линейное вещественное пространство, снабженное скалярным произведением  $(x, y)$  и одновременно коммутатором  $[u, v]$ , являющееся по отношению к первому предгильберто-

вым пространством, по отношению ко второму — алгеброй Ли.  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{M})$  обозначим гильбертово пространство, полученное пополнением  $\mathcal{M}$  как линейного многообразия, в норме  $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ . Предполагаем, что операции  $(x, y)$  и  $[u, v]$  согласованы между собой в смысле выполнения для любых  $u, v$  из  $\mathcal{M}$  и любого  $x$  из некоторого плотного в  $\mathcal{H}$  подмножества множества  $\mathcal{M}$  тождества (ср. с. [7, с. 444]).

$$(3) \quad (u, [v, x]) = (x, [u, v]),$$

или что множество  $\mathcal{M}_c$ , состоящее из элементов  $x \in \mathcal{M}$ , удовлетворяющих при любых  $u, v \in \mathcal{M}$  тождеству (3), плотно в  $\mathcal{H}$ . Далее, пусть  $A, B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  — линейные симметричные операторы, с общей областью определения  $\mathcal{D}$ , плотной в  $\mathcal{H}$ . Предполагаем, что оператор  $B$  положительно определен ( $(Bu, u) \geq \beta \|u\|^2$ ,  $u \in \mathcal{D}$ ,  $\beta = \text{const} > 0$ ), обладает полной системой собственных элементов, образующей ортонормированный базис пространства  $\mathcal{H}$ , и определенным на области значений  $\mathcal{R}(B)$  оператора  $B$  вполне непрерывным обратным оператором  $B^{-1}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $B^{-1}Bu \equiv u$ . Предполагаем также, что  $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}_c$ ,  $\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(B) \subset \mathcal{M}$  и операторы  $A, B$  перестановочны в том смысле, что  $(Au, Bv) = (Bu, Av)$ ,  $u, v \in \mathcal{D}$ , или в противном случае удовлетворяют следующему условию изометрии:  $(Bu, u) = (Au, Au)$ ,  $u \in \mathcal{D}$ . В последнем случае предполагаем дополнительно, что центр  $\mathcal{M}_0$  алгебры  $\mathcal{M}$  (состоящий по определению из элементов  $x \in \mathcal{M}$ , таких, что для любого  $u \in \mathcal{M}$   $[u, x] = 0$ ) ортогонален в  $\mathcal{H}$  области значений оператора  $A$ , а спектральная задача

$$(4) \quad Bu = \lambda Au, \quad u \in \mathcal{D}, \quad u \neq 0 \quad (\lambda \in R^1, \lambda \neq 0),$$

обладает полной системой собственных элементов, образующей ортонормированный базис гильбертова пространства  $\mathcal{H}_1$ , полученного пополнением линейного многообразия  $\mathcal{D}$  в норме  $\|u\|_1 = \{u, u\}^{1/2}$ , порожденной скалярным произведением  $\{u, v\} = (u, Bv) = (Bu, v)$ . Предполагаем, наконец, наличие неравенств вида

$$(5) \quad \gamma_1 \|u\|_1 \leq \|Au\| \leq \gamma_2 \|u\|_1, \quad \|[u, v]\| \leq \gamma_3 \|u\|_1 \|v\|_1, \\ u, v \in \mathcal{D}, \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 = \text{const} > 0, \quad \gamma_1 \leq \gamma_2$$

(двусторонняя оценка для нормы  $\|Au\|$  существенна лишь в случае выполнения условия перестановочности; при наличии условия изометрии последняя выполняется автоматически, как отвечающая  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ). В сделанных предположениях будем рассматривать следующее функциональное уравнение:

$$(6) \quad \epsilon Bx + [x, Ax] = y, \quad x \in \mathcal{D}, \quad y \in \mathcal{R}(B) \quad (\epsilon = \text{const} > 0),$$

являющееся многомерным аналогом соотношения (2), интерпретируемое как задающее установившиеся вращения некоторого абстрактного диссипативного волчка. К инерции и диссипации последнего отнесем введенные выше операции  $A$  и  $B$ . Волчок (6) будем называть коммутативным (изометричным), если  $A$  и  $B$  перестановочны (удовлетворяют условию изометрии); нормальным, если  $A$  — положительно определенный оператор; дефинитным, если положительно определен оператор  $A$  или  $-A$ . Для конечномерного волчка ( $\dim \mathcal{M} < \infty$ ) требования перестановочности или изометрии приводят соответственно к соотношениям:  $AB = BA$  или  $B = A^2$ . Конечномерный изометрический волчок, следовательно, коммутативен. Выполнение же условия изометрии для бесконечномерного волчка не предполагает, вообще говоря, перестановочности операций  $A$  и  $B$  (примеры 2, 5 из § 3). Переходим к формулировке интересующих нас нелокальных теорем единственности.

**Теорема 1.** Пусть волчок (6) коммутативен и  $u_*$  — собственный элемент оператора  $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , отвечающий числу  $\lambda: Au_* = \lambda u_*$ ,  $u_* \neq 0$ ,  $\lambda \in R^1$ , принадлежащий  $\mathcal{R}(B)$ . Тогда элемент  $B^{-1}u_* \in \mathcal{D}$  также является собственным для  $A$ , отвечающим  $\lambda$ .

При  $y = Cu_*$ ,  $C = \text{const}$ , элемент  $x_* = C\epsilon^{-1}B^{-1}u_*$  дает решение уравнения (6). Если  $\lambda$  — наименьшее или наибольшее собственное число оператора  $A$ , то при любых  $C \in R^1$ ,  $\epsilon > 0$  это решение единственно в  $\mathcal{D}$ .

**Теорема 2.** Пусть волчок (6) некоммутативен, но изометричен и дефинитен и пусть  $u_*$  — собственный элемент спектральной задачи (4), отвечающий собственному числу  $\lambda$  ( $\lambda \neq 0$ ), такой, что  $Au_* - \lambda u_* \in \mathcal{M}_0$ ,  $Au_* \in \mathcal{R}(B)$ . Тогда для  $y = CAu_*$ ,  $C = \text{const}$ , элемент  $x_* = C\epsilon^{-1}\lambda^{-1}u_*$  дает решение уравнения (6). Если  $\lambda$  является наименьшим или наибольшим собственным числом задачи (4) и всякий ее собственный элемент  $u$ , отвечающий данному  $\lambda$ , удовлетворяет условию:  $Au - \lambda u \in \mathcal{M}_0$ , то полученное решение  $x_*$  единственно в  $\mathcal{D}$ , каковы бы ни были  $C \in R^1$ ,  $\epsilon > 0$ .

Доказательство теорем 1, 2 опирается на равенства

$$(Au, Bu) = \lambda(u, Bu), \quad \epsilon(u, Bu) = (x_*, [u, Au]),$$

полученные для разности  $u = x - x_*$  решений  $x, x_* \in \mathcal{D}$  уравнения (6), удовлетворяющей вытекающему непосредственно из (6) соотношению

$$\epsilon Bu + [x_*, Au] + [u, Ax_*] + [u, Au] = 0$$

скалярным умножением обеих частей последнего на  $u$  и  $Au$  и использованием условия (3). Для экстремального  $\lambda$  первое из указанных равенств влечет за собой  $Au - \lambda u \in \mathcal{M}_0$ ; из второго следует тогда, что  $u = 0$ .

Дополним сказанное замечанием, касающимся устойчивости решения  $x_*$ . Соответствующее нестационарное уравнение волчка записывается как

$$(7) \quad \frac{d}{dt} Az + \epsilon Bz + [z, Az] = y, \quad t > 0.$$

Пользуясь рассуждениями, аналогичными приведенным выше, можно показать, предполагая дополнительно, что волчок (7) нормален и операции  $A, B$  коммутируют с  $d/dt$ , экспоненциальное стремление нормы  $\|z(t) - x_*\|_1$  к 0 при  $t \rightarrow \infty$ , справедливое для всякой гладкой кривой  $z: R_+^1 \rightarrow \mathcal{H}_1: t \rightarrow z(t)$ ,  $z(t) \in \mathcal{D}$ ,  $t \geq 0$ , удовлетворяющей уравнению (7), при правой части  $y \in \mathcal{R}(B)$ , определенной, как в условиях теорем 1, 2.

§ 3. Проиллюстрируем приведенные теоремы следующими граничными задачами, поставленными для уравнения (1):

1. Течение в круге  $K: (x^2 + y^2)^{1/2} = r < a$ , с условиями непротекания и отсутствия напряжения на границе:  $\psi = \Delta\psi = 0$  при  $r = a$ .

2. Течение в круге  $K$  при наличии условия прилипания:

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \quad r = a.$$

3. Течение в прямоугольнике  $\Pi: 0 < x < a, 0 < y < b$ , с граничными условиями примера 1:  $\psi = \Delta\psi = 0, (x, y) \in \partial\Pi$ .

4. Течение в топологическом кольце  $R$ , полученном отождествлением боковых сторон  $y = 0, b$  прямоугольника  $\Pi$ , с граничными условиями примера 1:  $\psi(x+a, y) = \psi(x, y), \psi(x, 0) = \psi(x, b) = 0, \psi_{yy}(x, 0) = \psi_{yy}(x, b) = 0, -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq b$  ("течение в канале").

5. Течение в кольце  $R$  при наличии условия прилипания:

$$\psi(x+a, y) = \psi(x, y), \psi(x, 0) = \psi(x, b) = 0, \psi_y(x, 0) = \psi_y(x, b) = 0, \\ -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq b.$$

6. Течение на торе  $T$ , полученном отождествлением противоположных сторон

прямоугольника  $\Pi$ :  $\psi(x+a, y) = \psi(x, y+b) = \psi(x, y)$ ,  $-\infty < x, y < \infty$  ("течение Колмогорова" [8]).

В роли алгебры  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(V)$  в приведенных граничных задачах выступает пространство  $C^\infty(\bar{V})$  бесконечно дифференцируемых вещественных функций  $\psi: \bar{V} \rightarrow R^1: P \rightarrow \psi(P)$ , определенных в замыкании области  $V \in \{K, \Pi, R, T\}$ , снабженное скалярным произведением пространства  $L_2(V)$  и скобками Пуассона:

$$(\varphi, \psi) = \int_V \varphi \psi dV, \quad [\varphi, \psi](P) = \varphi_y(P) \psi_x(P) - \varphi_x(P) \psi_y(P).$$

В случае  $V = T$  дополнительно предполагается ортогональность  $\psi$  константам:  $\int_T \psi dV = 0$ . Непосредственной проверкой выполнения тождества (3) можно убе-

диться в совпадении  $\mathcal{M}$  с  $\mathcal{M}_c$  для  $V = T$  и равенстве  $\mathcal{M}_c = \dot{C}^\infty(\bar{V}) = \{\psi \in C^\infty(\bar{V}): \psi|_{\partial V} = 0\}$  для  $V = K, \Pi, R$ . Соотношение (6) переходит в уравнение (1). В роли инерции  $A$  и диссипации  $B$  выступают сужения операций  $-\Delta$  и  $\Delta^2$  (определенных первоначально на  $C^\infty(\bar{V})$ ) на условиях примеров 1-6:

$$\mathcal{D} = M(T) = \{\psi \in C^\infty(T): \int_T \psi dV = 0\} \text{ в примере 6; } \mathcal{D} = \dot{C}_\Delta^\infty(\bar{V}) = \{\psi \in$$

$\dot{C}^\infty(\bar{V}): \Delta \psi|_{\partial V} = 0\}$  в примерах 1, 3, 4;  $\mathcal{D} = \dot{C}_n^\infty(\bar{V}) = \{\psi \in \dot{C}^\infty(\bar{V}): \partial \psi / \partial n|_{\partial V} = 0\}$  в примерах 2, 5 ( $n$  — внешняя нормаль к границе  $\partial V$ ). Течения примеров 1, 3, 4, 6 отвечают нормальному коммутативному волчку  $((\Delta \varphi, \Delta^2 \psi) = (\Delta^2 \varphi, \Delta \psi), \varphi, \psi \in \mathcal{D})$ ; течения примеров 2 и 5 — нормальному некоммутиативному изометрическому волчку  $((\psi, \Delta^2 \psi) = (\Delta \psi, \Delta \psi), \psi \in \mathcal{D})$ . Пользуясь теоремами 1, 2, укажем для рассматриваемых течений наименьшее собственное число  $\lambda = \lambda_{\min}$  (наибольшего  $\lambda$  не существует), отвечающую ему перемешивающую силу  $f = f(x, y)$  и определяемое  $f$  глобально единственное и устойчивое решение  $\psi$  уравнения (1):

1.  $f(x, y) = CJ_0(\mu_1^{(0)} r/a)$ ,  $\psi(x, y) = \text{Re}(a/\mu_1^{(0)})^4 f$ ,  $\lambda_{\min} = (\mu_1^{(0)}/a)^2$ ; здесь  $J_\nu: \mu \rightarrow J_\nu(\mu)$  — бесселева функция  $\nu$ -го порядка ( $\nu \geq 0$ ),  $\mu_1^{(\nu)}$  — наименьший положительный корень уравнения:  $J_\nu(\mu) = 0$ ,  $\mu > 0$ ;  $C = \text{const} \in R^1$ .

2.  $f(x, y) = CJ_0(\mu_1^{(1)} r/a)$ ,  $\psi(x, y) = \text{Re} \cdot C(a/\mu_1^{(1)})^4 [J_0(\mu_1^{(1)} r/a) - J_0(\mu_1^{(1)})]$ ,  $\lambda_{\min} = (\mu_1^{(1)}/a)^2$ .

3.  $f(x, y) = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ ,  $\psi(x, y) = \text{Re} \cdot \lambda_{\min}^{-2} f$ ,  $\lambda_{\min} = (\pi/a)^2 + (\pi/b)^2$ .

4.  $f(x, y) = C \sin \frac{\pi y}{b}$ ,  $\psi(x, y) = \text{Re} \cdot \left(\frac{b}{\pi}\right)^4 f$ ,  $\lambda_{\min} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$ .

5.  $f(x, y) = -C \cos \frac{2\pi y}{b}$ ,  $\psi(x, y) = 2 \text{Re} \cdot C \left(\frac{b}{2\pi}\right)^4 \sin^2 \frac{\pi y}{b}$ ,  $\lambda_{\min} = \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2$ ,

если  $\alpha = \frac{b}{a} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; при  $\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$  задача не имеет наименьшего  $\lambda$  и отвечающих ему  $f$  и  $\psi$ .

6.  $f(x, y) = C \sin \frac{2\pi(y + \vartheta)}{b}$ ,  $\vartheta = \text{const}$ ,  $\psi(x, y) = \text{Re} \cdot \left(\frac{b}{2\pi}\right)^4 f$ ,  $\lambda_{\min} = \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2$ , если  $\alpha = \frac{b}{a} \geq 1$ ;  $f(x, y) = C \sin \frac{2\pi(x + \vartheta)}{a}$ ,  $\psi(x, y) = \text{Re} \cdot \left(\frac{a}{2\pi}\right)^4 f$ ,

$\lambda_{\min} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2$ , если  $\alpha \leq 1$  (ср. с [9, 10]).

Как следствие приведенных теорем:

при любых  $\operatorname{Re} > 0$ ,  $C \in R^1$  рассмотренные стационарные течения однозначно определяются отмеченными правыми частями  $f$  по меньшей мере в классе  $C^\infty(\bar{V})$  и являются устойчивыми в смысле замечания, сделанного в конце § 2.

В заключение отметим, что условие  $Au_* - \lambda u_* \in M_0$  теоремы 2 для  $M = C^\infty(\bar{V})$  равносильно требованию:  $\Delta u_* + \lambda u_* = \text{const}$  (центр алгебры  $C^\infty(\bar{V})$  состоит из тождественных констант), которое выполняется в примерах 2 и 5. Желание придать отмеченному результату достаточную степень общности упирается в проблему выяснения выполнения указанного требования для областей, отличных от рассмотренных круга и кольца.

Вычислительный центр  
Академии наук СССР, Москва

Поступило  
27 I 1987

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
3. Moreau J.J. — C.R., 1959, vol. 249, № 21, p. 2156–2158.
4. Arnold V. — Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1966, vol. 16, № 1, p. 319–361.
5. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1986. 368 с.
6. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
7. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1984. 520 с.
8. Арнольд В.И., Мешалкин Л.Д. — УМН, 1960, т. 15, вып. 1, с. 247–250.
9. Мешалкин Л.Д., Синай Я.Г. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 6, с. 1140–1143.
10. Юдович В.И. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 453–467.