Федеральная целевая программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» 2009-2013 гг., направление "Математика", мероприятие 1.2.1. Соглашение № 8213 от 06.08.2012 г.

Научно-образовательный курс

«Математический анализ ламинарного и турбулентного течений несжимаемой жидкости в плоском канале: нелинейная устойчивость объединенных течений Куэтта–Пуазейля и Куэтта–Рейнольдса–Колмогорова»

О.В. Трошкин

Содержание курса

Объем: 75 страниц, 7 рисунков, 60 источников.

1. У истоков теории гидродинамической устойчивости.

Лекция 1

1.1. Проблема четырех задач.

Как хорошо известно, основные *напряжения* воды и воздуха – это те силы, с которыми каждой своей малой площадью сплошная среда давит на погруженные в нее тела, а при своем вращении устремляет их к центру вихря. Суммарная сила напряжений, или *выталкивающая сила* среды, способна порой поднять вагон в воздух, скрутив попутно в серпантин железнодорожный рельс (в торнадо, или атмосферном вихре). В покоящейся воде она была измерена еще 23 века назад Архимедом и записана, как простое уравнение, оказавшееся *первым точным* законом механики сплошных сред. Но именно напряжения, слагающие свою силу в этом уравнении, и попали в наиболее «трудную» часть математической физики – науки об уравнениях физики (или науки о силах), т.е. в математическую гидродинамику.

Спустя 19 веков выталкивающая сила была измерена Торричелли и Вивиани в воздухе и объяснена Паскалем, а столетием позже, вместе с уравнениями Эйлера [1] (в приближении идеальной среды), Навье–Стокса [2, 3] (при заметном влиянии вязкости и стенок) и Кельвина–Рейнольдса [4, 5] (с учетом турбулентных напряжений), и образовала свою «трудную» часть в математической физике.

Между тем, независимо от уравнений математической гидродинамики Рейнольдс наталкивается на систематическое нарушение простого закона Хагена [6], или течения Пуазейля [7] в трубе, связанное с постоянным искажением профиля скорости, вызываемое увиденным им в вспышках света спонтанным возникновение вихрей. Тогда же у него родилась идея упрощенной постановки аналогичной задачи для случая плоского канала [8], с которой по существу и начинается теория гидродинамической устойчивости [9, 10]. Напомним кратко историю этой постановки.

Прежде всего Рейнольдс хочет *объяснить* о постоянное нарушение профиля Пуазейля своим числом $\mathrm{Re} = c\rho U/\mu$, как отношением произведения радиуса трубы c, плотности ρ и средней скорости U к коэффициенту динамической вязкости среды μ: «Но, как очевидно, если вихри вызваны какой–то особой причиной, то интегрирование [уравнений Навье–Стокса – О.Т.] должно показать зависимость [условия – О.Т.] рождения вихрей от определенной величины [параметра – О.Т.] $c\rho U/\mu$» [8] (см. Рисунок 1).

It seemed, however, to be certain, if the eddies were owing to one particular cause, that integration would show the birth of eddies to depend upon some definite value of—

$$\frac{c\rho \mathrm{U}}{\mu}$$

Рисунок 1. Так был угадано число Re.

Спустя 11 лет Рейнольдс получил и следствия самих вихрей – турбулентные напряжения, определив их тем осреднением (по выделенному объему среды) парных произведений пульсаций компонент скорости (разностей между мгновенной и осредненной компонентами) [5], которым эти корреляции за 7 лет до него уже вывел Кельвин, как те же следствия, но для вихрей в идеальной среде [4].

«Особую» же причину Рейнольдса теперь называют *гидродинамической неустойчивостью*.

Вернемся к идее постановки. Желая *понять* эту причину, он обращается к простой геометрической аналогии, мысленно заменив пространство трубы на плоскость канала. При этом он почти готов признать устойчивость параболического профиля (уже полученного Стоксом [5] из уравнений Навье [4]) и почти уверен в неустойчивости введенного им, как альтернатива последнему, профиля синусоидального: «При движении воды в одном направлении, когда скорость максимальна в середине канала и уменьшается до нуля на стенках, как показывает кривая на fig.1, вихри возникают неохотно и случайно; когда же вода в канале движется на одной стороне канала противоположено ее движению на другой, как изображено кривой на fig.2, вихри в середине канала появляются легко и постоянно» [8] (см. Рисунок 2).

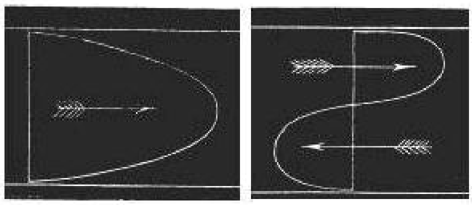

Рисунок 2. Параболический и синусоидальный профили руки Рейнольдса [8].

Вскоре к двум профилям Рейнольдса примкнули два других контура скорости в бесконечном и периодическом канале: линейный профиль Куэтта и криволинейный профиль Рэлея без точек перегиба [9], выбор которого в рассматриваемом случае естественно ограничить произвольным, но параболическим профилем скорости в канале, стенки которого допускают продольные смещения с постоянными скоростями.

Так возникла *проблема четырех задач*, или проблема устойчивости простейших установившихся *основных* (невозмущенных) течений в бесконечном периодическом канале с параллельными стенками, допускающими смещение с постоянными скоростями: линейного профиля Куэтта, симметричного параболического профиля Пуазейля, произвольного параболического профиля Рэлея и синус–профиля Рейнольдса.

Она рассматриваются обычно при условиях непротекания или прилипания для уравнений Эйлера или Навье, соответственно, по отношению к произвольным начальным возмущениям основных течений (*нелинейная устойчивость*) или для уравнений Рэлея и Орра–

Зоммерфельда – линеаризаций уравнений Эйлера или Навье на указанных основных течениях, или, что равносильно, по отношению к бесконечно малым начальным возмущениям для исходных (нелинейных) уравнений (*линейная устойчивость*). При этом исследуются как ограниченные числа Рейнольдса (*локальная устойчивость*), так и неограниченные числа Re (*глобальная устойчивость*), а в последнем случае – как ограниченный сверху *главный фактор*, или отношение периода канала l к его ширине h, или ограниченный снизу *обратный фактор* $\alpha = h/l$ (случай *условной глобальной устойчивости*), так и неограниченный сверху главный фактор $1/\alpha$, или неограниченный снизу обратный фактор α (случай *безусловной глобальной устойчивости*).

Вопрос о нелинейной безусловной глобальной устойчивости для первого профиля (течения Пуазейля) в этой задаче стал «проблемой века» (ушедшего) в теории гидродинамической устойчивости, и для него требовался только один из двух возможных ответов: да или нет. Нашей целью и будет получение положительного ответа на этот вопрос.

1.2. Пятая задача.

В середине прошлого века к четырем задачам проблемы добавилась пятая: *задача Колмогорова* об устойчивости синус–профиля в канале с *периодическими стенками* (или на периодической плоскости, т.е. на двумерном торе) для уравнений Навье, когда условия прилипания на стеках канала уступают место условиям периодичности [11].

Однако четыре задачи «наотрез отказались» принять ее в свою проблему [9] по той «веской» причине, что с ее появлением с предполагавшимся неустойчивым синус–профилем Рейнольдса начинает происходить странная метаморфоза: при замене условий прилипания на условия периодичности он «превращается» в устойчивый профиль. Последнее же могло привести к таким же «страшным» последствиям и для трех остальных «членов коллектива» проблемы четырех задач, объединенных только условиями прилипания (для уравнений Навье) или непротекания (для уравнений Эйлера).

Так оно и случилось при *двумерных* начальных возмущениях, что и для синус–профиля, который в оказался сначала линейно [12], затем нелинейно [13], но условно (при обратном факторе, большем 1) глобально устойчивым для периодических стенок канала (на двумерном торе), что подтвердили натурные и численные эксперименты [14], и, наконец, нелинейно условно (при прежнем ограничении на главный фактор) глобально единственным [15] и, как следовало из полученных оценок в [15], глобально устойчивым для исходных (как у Рейнольдса) условиях прилипания на стенках канала [16].

1.3. Трудности линейного подхода.

Коснемся известных фактов в проблеме четырех задач, не связанных с пятой задачей. Устойчивость или неустойчивость первого (и главного) члена «коллектива четырех», плоского течения Пуазейля из первой части картины Рейнольдса (левая часть Рисунка 1), устанавливались и опровергались неоднократно [9]: один из последних результатов – теорема Крылова о неустойчивости профиля Пуазейля *по линейному приближению* (т.е. при бесконечно малых начальных возмущениях данного профиля в приведенной выше исходной постановке) [17]. Вопрос о требуемой (физикой) его *нелинейной* устойчивости остался при этом открытым.

Традиционно, устойчивость того или иного *основного* (невозмущенного) течения рассматривается в терминах линейного приближения Орра–Зоммерфельда, нейтральных кривых и асимптотических методов [9]. И, действительно, отвечающая им линеаризация на исследуемом профиле уравнений Навье может привести (как в теореме Крылова) к неустойчивому асимптотическому решению, пусть, с регулярным вырождением (при неограниченном уменьшении малого коэффициента при старших производных), как для случая уравнений с постоянными коэффициентами [18]. Однако все попытки получить нелинейную неустойчивость из линейной, привлекая для этого известные конструкции теории ветвлений [19, 20] или путем анализа спектра линеаризованной задачи [21, 22], упираются в *кратность* надлежащего собственного числа для линеаризованного оператора. Она же, чтобы приводить к бифуркации, по *теореме Красносельского*, должна быть *нечетной* [23], а для течения Пуазейля неизвестна (вместе и с выполнением условий указанной теоремы для рассматриваемого случая, см. [17]).

Далее, общее течение Рэлея (с продольным профилем скорости без точек перегиба) *линейно* устойчиво по одноименной теореме и для одноименного уравнения (уравнения Орра–Зоммерфельда без вязкости), но – только как течение *идеальной жидкости* (описываемой уравнениями Эйлера) [9]. По Арнольду это течение сохраняет устойчивость и *нелинейно* (т.е. при переходе к произвольным начальным возмущениям) [24, 25].

Как *предельный* для исчезающей вязкости, параболический профиль *должен* сохранять устойчивость и для уравнений Навье. Предложенная же Арнольдом для анализа нелинейной устойчивости *теоретико–групповая аналогия* [25] (между Ли группами $SO(3)$ (вращений в трехмерном пространстве) и $SDiff(V)$ (сохраняющих объем диффеоморфизмов области течения V)) не «работает» в вязких средах, которые, как оказалось [15, 16], готовы «предоставить» из математических «услуг» только алгебры Ли, но «отказывают» в предоставлении одноименных групп.

Теорию групп диффеоморфизмов [25], совсем неочевидно возникшую у Владимира Игоревича Арнольда из почти очевидного, но тонкого замечания французского математика Жан Жака Моро [26] («не киноактера»,– как отрекомендовал его некогда сам Владимир Игоревич руководителю Проекта), относящегося к хорошо известной *форме Громеки–Лэмба* [27, 28] уравнений Эйлера, продолжающую развиваться [29, 30], еще только ожидают по–настоящему большие приложения к теории гидродинамической устойчивости. Необходимый обзор примыкающей проблематики можно найти, например, в [31–33].

Вернемся к нашим задачам. Для течения Куэтта хорошо известна теорема Романова об устойчивости *плоского* течение Куэтта [34]: данное течение *устойчиво*, пусть, *локально* (для коэффициента кинематической вязкости, допускающего уменьшение, но всегда ограниченного снизу положительным числом), но *нелинейно* (для уравнений Навье) и даже в классе *трехмерных* течений. Однако ей «возражают» теоремы Иванилова–Яковлева [35] и Вельте [36] о неустойчивости *цилиндрического* течения Куэтта: при уменьшении вязкости и переходе ее через некоторое критическое значение из этого течения действительно возникают вихри Тейлора [37].

На самом деле «устойчивая» теорема Романова и «неустойчивые» теоремы Иванилова, Яковлева и Вельте не противоречат друг другу, но вместе указывают на *существенность кривизны* у обтекаемой поверхности: по причине отсутствия (или, напротив, ввиду наличия) ее у обтекаемой стенки плоского (или цилиндрического) канала профиль течения Куэтта является линейным, а профиль течения Пуазейля – параболическим (профиль основного течения не является ни линейным, ни параболическим, соответственно).

Именно условие быть кривой *второго порядка* (прямой или параболой) и обеспечивает профилю (надлежащими *энергетическими оценками* [14]) ту *нормальность* в уравнениях Эйлера и Навье, по которой его течение, как решение указанных уравнений, оказывается аналогичным нормальному (обычному, устойчивому) вращению юлы, как решению динамических уравнений Эйлера для волчка, допускающего трение [38–40] (см. Рисунок 3).

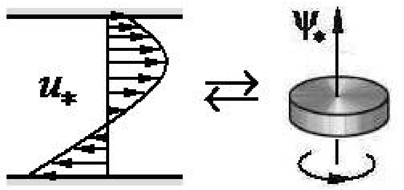

Рисунок 3. С точки зрения алгебры Ли, основному течению в канале с параболическим профилем скорости u_* отвечает устойчивое вращение юлы с угловой скоростью ψ_* [38–40].

Таким образом, Рейнольдс оказался прав, допуская «двумерную» устойчивость параболы (слева на Рисунке 1 у него «вихри возникают неохотно и случайно»), и, вероятно, сначала был бы несколько удивлен «двумерной» устойчивостью синуса (справа на Рисунке 2, где им отмечалось, что «вихри в середине канала появляются легко и постоянно»), но, скорее всего, все–таки пришел бы к разделяемому сейчас многими убеждению, что *двумерной турбулентности не существует*, или *турбулентность существенно трехмерна*, коль скоро развивается из гидродинамических неустойчивостей.

В вычислительных экспериментах указанные профили обычно неустойчивы для трехмерных возмущений. Приведем примеры такого рода экспериментов.

Как альтернативу двумерным возмущениям, пример развития *трехмерных неустойчивостей* одномерного основного течения дает недавний «экспериментальный» результат, полученный в ходе прямого численно моделирования уравнений Эйлера: сдвиговое течение в цилиндрической трубе с профилем скорости, линейно падающем или возрастающем к ее центральной оси, при начальной закрутке потока вокруг оси с произвольным знаком (по ходу или против хода часовой стрелки), неизменно приводит к неустойчивости основного течения, с возникновением шарового или кольцевого вихрей, соответственно [41].

В отношении влияния на устойчивость *кривизны* обтекаемой поверхности известен факт, что ограниченное *двумя измерениями* течение Куэтта между цилиндрами теряет устойчивость с образованием череды вихрей неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [42]. По причине ненулевой кривизны поверхности цилиндра устойчивости в том течении нет, по видимому, нет и на «бесконечно мелкой сетке», т.е. аналитически (новая задача).

Моделируемое «напрямую», в режиме реального времени, *плоскопараллельное* течение Куэтта за считанные секунды «проваливается» в трехмерный хаос, упорядоченный, однако, чередой сменяющих одна другую картин течений со все более мелкими вихревыми кольцами и трубками [43].

Данными примерами мы и ограничимся.

Поясним структуру курса. Лекции разделов 2.1–2.4 являются вводными и ориентируют на общую проблематику нелинейной устойчивости. Основные результаты курса, теоремы 1.1 и 2.1, относящиеся к устойчивости параболического и синусоидального профилей, приводятся в разделах 3.2 и 4.2, соответственно. Теоремы следуют за постановками задач, приводимыми в разделах 3.1, 3.2 и 4.1, 4.2, и продолжаются доказательствами, объединяющими утверждения 1.1–1.11 и 2.1–2.11, приводимыми в разделах 3.2–3.4 и 4.2–4.6, соответственно. Раздел 3.5 посвящен полезной механической аналогии.

Переходим к основным рассмотрениям.

2. Особенности нелинейного анализа.

Лекция 2

2.1. Основные течения.

Итак, пусть при заданных постоянных плотности $\rho > 0$ и вязкости (динамической) $\mu > 0$ *несжимаемой жидкости* в пространственной области V, с подвижной или неподвижной границей ∂V, определено *гладкое* (бесконечно дифференцируемое) поле *перемешивания* $\mathbf{g}$, или *соленоидальное* (бездивергентное) поле *ускорений* $\mathbf{g}$ внешних массовых сил, *стационарное* ($\mathbf{g}_t = \mathbf{0}$) или зависящее от времени $t > 0$.

Под *основным* (невозмущенным) течением (полем скоростей) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_*$ в области V будем понимать гладкое соленоидальное векторное поле

$$\mathbf{u} = u^x\mathbf{i} + u^y\mathbf{j} + u^z\mathbf{k}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{g} = 0, \quad \nabla = \mathbf{i}\,\partial/\partial x + \mathbf{j}\,\partial/\partial y + \mathbf{k}\,\partial/\partial z,$$

перемешиваемое (при $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$) или *свободное* (при $\mathbf{g} = \mathbf{0}$), которое

(**A**) вместе с некоторыми гладкими *удельными* (отнесенными к плотности ρ и определенными с точностью до потенциала внешних массовых сил) давлениями *Эйлера* p_E и *Стокса* p_S разрешает в V при любой кинематической вязкости $\nu = \mu/\rho$ одноименные уравнения

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = -\nabla p_E \quad \textit{и} \quad \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} = -\nabla p_S + \mathbf{g},$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla, \ \nu = const \geq 0, \quad t > 0,$$

включая и предельный случай *идеальной среды* ($\nu = 0$),

(**B**) при *согласованных* начальных и граничных условиях

$$\mathbf{u}\big|_{t=0} = \mathbf{a} \ \textit{ на } \ V + \partial V, \quad \mathbf{u}\big|_{\partial V} = \mathbf{b} \ \textit{ при } \ t \geq 0 \quad \textit{и} \quad \mathbf{a}\big|_{\partial V} = \mathbf{b}\big|_{t=0},$$

(**C**) *корректных* как условия смешанной задачи для *линейных* уравнений Стокса (при любом $\nu > 0$), гарантирующих, в частности, существование *вечного* (как определенного *для всех* $t > 0$) течения $\mathbf{u}$ [44].

Как следствие, сумма $p_N = p_E + p_S$ составляет давление *Навье* в одноименных уравнениях

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{g},$$

которым при $p = p_N$ и удовлетворяет поле основного течения $\mathbf{u} = \mathbf{u}_*$.

Варьирование начальных данных $\mathbf{a}$ и вязкости $\nu > 0$ при сохранении требований (**B**) и (**C**) приводит к естественному вопросу о *нелинейной* (для произвольных $\mathbf{a}$) и *нелокальной* (или *глобальной*, для произвольных ν, при включая предел $\nu = 0$) *устойчивости* (в смысле Ляпунова) основного течения $\mathbf{u}_*$ по отношению к его *нелинейным возмущениям* $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}_*$ как решениям начально–краевой задачи для уравнений Навье.

По стандартной *оценке* (неравенстве) *асимптотической устойчивости* стационарное основное течение единственно (поскольку вечно и, будучи асимптотически устойчивым, в пределе по $t \to \infty$ совпадает с основным течением). Обратно, оценки единственности стационарного решения, как правило, допускают перенос на нестационарный случай [44], что характерно для обеспечиваемой уравнениями Навье диссипации энергии, исключающей патологию единственного и неустойчивого положения равновесия рассматриваемой механической системы. Поэтому разделение *вопроса о глобальной единственности и устойчивости* на части не представляется принципиальным по меньшей мере по физическим мотивам.

Из тех же соображений можно принять и следующую *расширенную трактовку* гидродинамической неустойчивости, включив в круг последней, как специальный случай, *неединственность* решения *нестационарных* уравнений Навье, обусловленную потерей его гладкости со временем, *при согласованной* (в смысле (**B**)) *и корректной* (в смысле (**C**)) постановке смешанной задачи для линейных *уравнений Стокса*.

2. 2. Сильные и слабые решения.

Известную трудность в вопросе о глобальной устойчивости составляет пока еще не выясненная до конца в части (**C**) проблема эквивалентности *сильного* и *слабого* решений задачи (**B**) для нестационарных уравнений Навье: первое единственно, но, вообще говоря, не вечно (оценки его времени жизни попадают в прямую зависимость от вязкости $\nu > 0$), второе вечно, но, быть может, неединственно:

Н е е д и н с т в е н н о с т ь   с л а б о г о   р е ш е н и я. Для *плоскопараллельных течений* вечность единственного (или единственность вечного) решения в целом установлена как для уравнений Навье [44], так и для и уравнений Эйлера [45–47]. Для пространственных осесимметричных течений ее уже нет в *примере Ладыженской* [44, глава 6, §7, задача (85)–(86)], где вечно существуют два слабых решения в области между коаксиальными цилиндрами и ортогональными им плоскими торцами, которые вместе с первыми образуют непроницаемые *скользкие* стенки (как исключающие напряжения трения, что в рассматриваемом случае осевой симметрии равносильно отсутствию источников завихренности на границе), раздвигаемые по длине и радиусу в постоянных пропорциях квадратного корня из времени $t > 0$.

В *стационарном случае* $(\partial/\partial t = 0)$ при этом остается зависимость *единственности* (пусть, сколь угодно гладкого течения) от вязкости $\nu > 0$ [44].

Лекция 3

2. 3. Вихревая катастрофа.

В *идеальной среде* $(\nu = 0)$ неединственность слабого нестационарного течения наследуется *стационарными уравнениями Эйлера* в виде топологической зависимости условия единственности (или неединственности) плоского решения стационарной задачи от наличия (или отсутствия) в области течения центров вихрей. В простейшем случае ее обнаруживают следующие

В м о р о ж е н н ы е в и х р и. Их доставляют *срезки Соболева* [48] (как *гладкие*, т.е. бесконечно дифференцируемые, но *не регулярные*, т.е. не разложимые в степенной ряд в любой окрестности граничной точки подобласти области течения V, где они обращаются в 0 вместе со всеми производными) и построенные на них *вихри Дезина* [49] как семейства замкнутых линий тока $\psi = \psi(x, y) = const$, с функциями тока – *срезками* вида

$$\psi = \psi_{\pm} = \psi_0 \exp\left(1 - \frac{\varepsilon_{\pm}^2}{\varepsilon_{\pm}^2 - r_{\pm}^2}\right)$$

$$\textit{в}\ K_{\pm} = \left\{ r_{\pm} = \sqrt{\left(x - x_{\pm}\right)^2 + \left(y - y_{\pm}\right)^2} < \varepsilon_{\pm} \right\}$$

$$\textit{и}\ \ \psi_{\pm} = 0\ \ \textit{вне}\ \ K_{\pm},\ \textit{причем}\ \ K_{\pm}\ \textit{не пересекаются},$$

$$x_{\pm}, y_{\pm}, \varepsilon_{\pm} = const > 0\,.$$

Такие вихри действительно оказываются *вмороженными*, т.е. гладко встроенными в покоящуюся среду решениями уравнений Эйлера на плоскости (см. Рисунок 4).

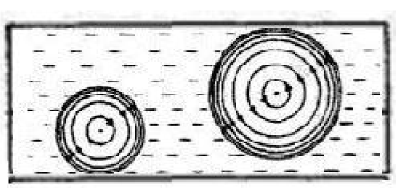

Рисунок 4. Вихри, бесконечно гладко вмороженные в покоящуюся среду [49].

Более изощренным способом (через возмущение зависимости завихренности поля скоростей от функции тока, доставляемое их граничными значениями) срезки Соболева вмораживаются и в подвижную среду, а именно в плоское или осесимметричное стационарное течение невязкой и несжимаемой жидкости с вихрем (вихревой камерой), нарушающем принцип максимума [31–33].

В *задаче о протекании* идеальной среды в конечном канале (или трубе), при заданных постоянной скорости втекания и вытекания и завихренности на участке втекания, эта топологическая зависимость приводит как к *неединственности стационарного решения*, так и к *нелинейной неустойчивости* основного (потенциального) поля скоростей (с постоянной скоростью всюду в области течения):

В и х р е в а я к а т а с т р о ф а. Установившееся ($\omega_t = 0$) плоское или осесимметричное протекание с распределенной скоростью $\mathbf{u}$ идеальной несжимаемой жидкости на участке $-l < x < l$ канала $0 < y < h$,

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}\upsilon, \quad \omega_t + (u\omega)_x + (\upsilon\omega)_y = 0, \quad \upsilon_x - u_y = \omega, \quad u_x + \upsilon_y = 0,$$

или трубы $0 < r < h$,

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}\upsilon\cos\theta + \mathbf{k}\upsilon\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \mathrm{arctg}(y/x),$$

$$\omega_t + (u\omega)_x + (\upsilon\omega)_r = 0, \quad \upsilon_x - u_r = \omega, \quad (ru)_x + (r\upsilon)_r = 0,$$

с постоянной скоростью U на входе $x = -l$ и выходе $x = l$ – и постоянной или пропорциональной радиусу $r > 0$ завихренностью $\omega = \Omega$ или $\omega = \Omega r/h$, $-\infty < \Omega = const < \infty$ на входе,

$$\upsilon\big|_{y,r=0,h} = 0, \qquad u\big|_{x=\mp l} = U,$$

$$\omega\big|_{x=-l} = \Omega,\ \Omega r/h,$$

$$U,\ \Omega = const, \quad U > 0,$$

допускает разложимое в ряд Тейлора в окрестности каждой внутренней точки области течения *аналитическое* решение:

(**a**) без вихря в области течения, если значения безразмерного параметра $C = \Omega h / U$ ограничены критическими числами различного знака $\pm C_{\pm} > 0$: $C_{-} \le C \le C_{+}$;

(**b**) с вихрем, примыкающем к нижней стенке канала $y = 0$ (или к оси симметрии $r = 0$) при $C < C_{-}$ или к верхней стенке канала $y = 0$ (или к цилиндрической стенке трубы $r = h$) при $C > C_{+}$ (шаровым или кольцевым – в осесимметричном случае).

Это течение оказывается единственным или неединственным в классе гладких течений (включая границу) в случае (**a**) или (**b**), соответственно, причем в последнем существует бесконечно много *сколь угодно гладких* решений поставленной граничной задачи [31–33] (см. Рисунок 5).

По теореме Юдовича [45], задание завихренности $\omega = \Omega$ на входе $x = -l$, $0 < y < h$, в канал $0 < x < l$ обеспечивает существование единственного вечного гладкого решения нестационарных *плоских* уравнений Эйлера при в приведенной выше задаче о *простом протекании*: $u^x = U$ при $x = \mp l$ и $u^y = 0$ при $y = 0, h$. Ввиду вихревой катастрофы, при достаточно большой завихренности на входе, точнее, при $C = \Omega h / U > C_{+} > 0$ или $C < C_{-} < 0$, пределом данного единственного решения в классе гладких векторных полей при $t \to \infty$ если и может служить, то любое из бесконечного числа сколь угодно гладких стационарных течений.

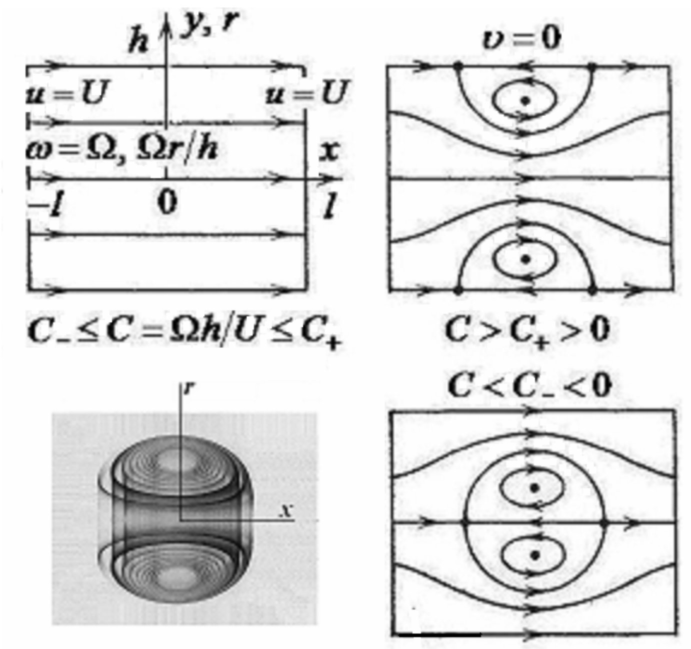

Рисунок 5. Единственное стационарное *регулярное* (как разложимое в степенной ряд в окрестности каждой внутренней точки области течения) решение плоской или пространственной осесимметричной задачи о протекании идеальной несжимаемой жидкости в канале ширины h (верхняя половина каждого рисунка) или трубе радиуса h и конечной длины $2l$, с постоянной скоростью $U > 0$ на входе и выходе, при малых значениях Ω завихренности ω *на входе* (слева вверху) или ее больших значениях (справа вверху или внизу), приводящих к возникновению вихря в области течения (с пространственной картиной линий тока при $\Omega < 0$ – слева внизу). В последнем случае возникает *бесконечно много* сколь угодно гладких *не регулярных* решений поставленной граничной задачи (*вихревая катастрофа*). Соответствующие критические значения $C_{\pm}$ безразмерного параметра $C = \Omega h / U$ определены в [31–33]. *Плоская нестационарная* задача о протекании (с согласованными начальными данными) имеет при этом всегда *единственное* гладкое решение [45].

Другими словами, получается *вихревой парадокс*: при граничных значениях, допускающих наличие вихря в области регулярного стационарного решения уравнений Эйлера, у единственного, нестационарного и как угодно гладкого решения тех же уравнений, с теми же граничными условиями, не существует стационарного предела.

2. 4. Нерегулярные решения.

Разрешение вихревого парадокса очевидно: вместо *грубого* предположения о *гладкости* течения в теории гидродинамических уравнений необходимо требовать выполнения более *тонкого* условия его *регулярности* (аналитичности).

Выполнение последнего и наблюдается в численных экспериментах. Оно же – непременный атрибут всех расчетных схем и оценок норм сеточной сходимости, строго предполагающих регулярность приближаемых решений.

В этом смысле вычислительная гидродинамика любой своей частью (конечными разностями, объемами, элементами или спектральными модами) всегда оказывается *ближе* к «природе вещей» исследуемых уравнений, чем математическая физика, основанная на теоремах вложения [44, 50], допускающих не регулярную гладкость течений, а потому обращенных к более широкому классу соответствующих *нерегулярных решений* (бесконечно гладких, но не аналитических), чем нужен механике.

Однако даже при отмеченной «грубости» традиционного подхода все же можно избежать «тонкого» требования регулярности решения и анализировать его устойчивость в прежних терминах норм и оценок, но уже не искать последнюю в «виртуальном» мире общих теорем вложения [44, 48, 50], а пользоваться «живыми» оценками для функций Ляпунова, доставляемых непосредственно гидродинамическими уравнениями и граничными условиями в виде надлежащих *энергетических соотношений*, существенно учитывающих структуру порождаемого уравнениями коммутатора соответствующей алгебры Ли [15, 33, 38–40].

К этому мы и переходим.

3. Устойчивость параболический профиля.

Лекция 4

3.1. Алгебра функций тока.

Вышеприведенные примеры относились непосредственно к случаю нелинейного возмущения (граничной завихренностью $\Omega \neq 0$) основного течения (с $\Omega = 0$) в задаче для *конечного канала* (или цилиндра). Тем более желательным становится анализ альтернативной возможности нелинейной и нелокальной устойчивости основного течения в *периодическом канале*. Однако на этом пути возникают другие вопросы, к рассмотрению которых мы и переходим.

Примерами основных течений служат упомянутые во введении известные *стационарные* ($\mathbf{u}_t = \mathbf{0}$) и *свободные* ($\mathbf{g} = \mathbf{0}$)

(**i**) *течение Куэтта* между вращающимися цилиндрами или его плоскопараллельный аналог в *сдвиговом слое* $0 < y < h$, между подвижными пластинами $y = 0, h$, без *накачки*, или градиента давления $\nabla p = \mathbf{0}$, и

(**ii**) *течение Пуазейля* в круглой трубе или плоском канале, с накачкой $-\nabla p = -p_x \mathbf{i}$, $-p_x = const > 0$, а также

(**iii**) их сумма в сдвиговом слое, с параболическим профилем скорости, как разновидность *течения Рэлея* (без точек перегиба) [9] и, наконец,

(**iv**) не свободное, или *перемешиваемое* синусоидальным полем $\mathbf{g} = g^x \mathbf{i}$ ускорений $g^x = g \sin\left(2\pi y/h\right)$, $g = const > 0$, и пропорциональное этому полю *течение Колмогорова* [11, 14] в канале с *периодическими стенками* $y = 0, h$.

Как уже отмечалось, еще раньше профиль встречных потоков в канале с неподвижными и *твердыми стенками* (где выполнено условие прилипания $\mathbf{u} = \mathbf{0}$) нарисовал Рейнольдс [8]. С его помощью он хотел объяснить увиденное им спонтанное возникновение вихревых каскадов в трубе. Отмечая преобладание сдвиговой неустойчивости над пристеночной, которое он наблюдал в пространстве трубы и ожидал увидеть *на плоскости*, он переходит для упрощения рассуждений от первых ко вторым, мысленно заменив трубу на канал [8] (см. Рисунок 2).

Следуя Рейнольдсу, перейдем и мы к каналу, чтобы посмотреть, к чему приводит такое упрощение.

Ограничимся *функциями тока* $\psi = \psi(t, x, y)$ *плоских* течений $\mathbf{u} = \psi_y \mathbf{i} - \psi_x \mathbf{j}$ [51], *свободных* (от ротора поля внешних ускорений), где приведенным выше соотношениям, определяющим основные течения и их нелинейные возмущения, отвечают *признак основного течения*

$$\begin{gathered} \psi_{*t} = 0, \quad \nu B\psi_* = 0 \quad \textit{и} \quad [\psi_*, A\psi_*] = 0, \quad \textit{где} \\ [\psi, \omega] \equiv \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y, \end{gathered} \tag{1.1}$$

и *вихревое уравнение Гельмгольца* [52]:

$$\begin{gathered} A\psi_t + \nu B\psi + [\psi, A\psi] = 0, \;\; t > 0, \\ \textit{где} \;\; A \equiv -\Delta, \quad B \equiv \Delta\Delta \quad \textit{и} \quad \Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 . \end{gathered} \tag{1.2}$$

Пусть so_V^∞ – линейное пространство гладких (класса C^∞) вещественных функций $\psi(t, x, y)$ времени $t \ge 0$ и координат *замкнутой периодической ячейки* $V = \{0 \le x \le l, 0 \le y \le h\}$, бесконечного канала ширины (или высоты) h,

$$\begin{gathered} so_V^\infty : \psi\big|_{x=0}^{x=l} \equiv \psi\big|_{x=l} - \psi\big|_{x=0} = 0 \;\; (\textit{включая производные}), \\ \psi \in C^\infty(V, t \ge 0). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Уравнение (2) (т.е. (1.2)) будем рассматривать внутри ячейки канала на функциях тока $\psi \in so_V^\infty$, задаваемых на непроницаемой границе семью варьируемыми постоянными,

$$\psi\big|_{y=0} = a\,, \quad \psi\big|_{y=h} = a + bh\,,$$
$$\nu\left(\psi_y\big|_{y=0} - c + d\right) = 0\,, \quad \nu\left(\psi_y\big|_{y=h} - c - d\right) = 0\,, \quad 0 \le x \le l\,, \tag{1.4}$$
$$a,b,c,d,l,h,\nu = const\,, \quad -\infty < a,b,c,d < \infty\,, \quad l,h > 0\,, \quad \nu \ge 0\,,$$

и включаемых при $\nu > 0$ или исключаемых при $\nu = 0$ условиях прилипания.

Как нетрудно проверить, удовлетворяющее (1)–(4) классическое *основное течение* описывается кубической функцией тока

$$\psi_* = a + y\left(c - d + \bar{y}\left(d + (b-c)(3-2\bar{y})\right)\right), \quad где \;\; \bar{y} = y/h\,, \tag{1.5}$$

или параболическим профилем скорости

$$u_*^x = \psi_{*y} = c - d + 2\bar{y}\left(d + 3(b-c)(1-\bar{y})\right), \tag{1.6}$$

объединяющем *в указанном случае* течения Куэтта (при $b = c$), Пуазейля (при $c = d = 0$) и Рэлея (при $|b-c|\left(|c| + |d|\right) > 0$).

Профиль (6) не имеет точек перегиба. Как уже отмечалось, по Рэлею он устойчив по отношению к эволюциям бесконечно малых начальных возмущений, доставляемым решениями линеаризованных на нем уравнений Эйлера (*линейно* устойчив в невязкой среде) [9]. По Арнольду он должен сохранять устойчивость и при переходе к произвольным начальным возмущениям (т.е. оставаться *нелинейно* устойчивым) [24, 25].

По оценкам норм возмущений стационарных вращений абстрактного (бесконечномерного) *диссипативного* (с трением) *волчка*, порождаемого условиями задачи (2)–(4) [31], этот профиль оказывается глобально единственным решением последней (вместе с основными течениями ряда аналогичных задач). Как уже отмечалось, такие установившиеся движения классических механических систем с трением не могут не быть устойчивыми. Поясним источники упомянутых оценок.

В основе соответствующего *алгебраического подхода* [31] лежит добавление к *геометрии*, *метрике* или *скалярному произведению*

$$\left(\varphi,\psi\right)=\overline{\varphi\psi}\,,\qquad \overline{\chi}\equiv\int_0^l\int_0^h\chi dxdy\,,\quad \textit{с нормой}\ \left\|\varphi\right\|=\sqrt{\left(\varphi,\varphi\right)}\,, \tag{1.7}$$

новой операции в виде скобок Пуассона из (1), как *алгебры*, *коммутатора* или абстрактного *векторного произведения*, порождающего в so_V^∞ из (3) многомерный аналог дифференциала $\delta f=df$, или кососимметричный билинейный оператор $\left[\delta,f\right]$, с правилом дифференцирования по частям в форме *тождества Якоби*

$$\left[\delta,\left[\varphi,\psi\right]\right]=\left[\left[\delta,\varphi\right],\psi\right]+\left[\varphi,\left[\delta,\psi\right]\right],\quad \textit{причем}$$

$$\left[\varphi,\psi\right]=-\left[\psi,\varphi\right]\in so_V^\infty$$

$$\textit{и}\ \left[\delta,\alpha\varphi+\beta\psi\right]=\alpha\left[\delta,\varphi\right]+\beta\left[\delta,\psi\right]\ \ \textit{для}\ \alpha,\beta=const\ \textit{и всех} \tag{1.8}$$

$$\delta,\varphi,\psi\in so_V^\infty$$

(в чем нетрудно убедиться непосредственной проверкой).

Функциональные пространства, снабженные либо одной метрикой $\left(\varphi,\psi\right)$, либо одним коммутатором $\left[\psi,\chi\right]$, суть традиционные предгильбертовы пространства либо алгебры Ли, соответственно. Вместе же с *метрикой* (7) и *коммутатором* (8), линейное многообразие so_V^∞ получает *элемент объема* в виде их *смешанного произведения* $\left(\varphi,\left[\psi,\chi\right]\right)$ как *объема гексаэдра*, построенного на сомножителях φ,ψ,χ как на векторах.

Действительно, сужая последовательно на условиях

$$so_{V2}^\infty=\left\{\psi\in so_V^\infty:\psi_x\big|_{y=0,h}=0\right\},$$

$$so_{V1}^\infty=\left\{\psi\in so_{V2}^\infty:\psi\big|_{y=0,h}=0\right\} \tag{1.9}$$

$$\textit{и}\quad so_{V0}^\infty=\left\{\psi\in so_{V1}^\infty:\psi_y\big|_{y=0,h}=0\right\}$$

функции из (3), непосредственно убеждаемся, что смешанное произведение $\left(\varphi,\left[\psi,\chi\right]\right)$ метрики (7) и коммутатора (8) *инвариантно* к циклической перестановке своих сомножителей, при которой одна из «сторон» соответствующего «гексаэдра» φ,ψ,χ принадлежит *всюду плотному* в so_V^∞ (в норме (7)) множеству so_{V2}^∞ или so_{V1}^∞, а именно

$$\left(\varphi,[\psi,\chi]\right)=\left(\chi,[\varphi,\psi]\right)$$
$$\text{при } \varphi\in so_{V1}^\infty \text{ и } \psi,\chi\in so_V^\infty \quad \text{или} \quad \text{при } \psi\in so_{V2}^\infty \text{ и } \chi,\varphi\in so_V^\infty, \tag{1.10}$$

что следует из непосредственно проверяемых тождеств:

$$\left(\varphi,[\psi,\chi]\right)-\left(\chi,[\varphi,\psi]\right)=\overline{[\psi,\chi\varphi]}=\overline{P_x}-\overline{Q_y},$$
$$\text{где } P=\psi_y\chi\varphi,\quad Q=\psi_x\chi\varphi,$$
$$\overline{P_x}=\int_0^h P\Big|_{x=0}^{x=l}dy,\quad \overline{Q_y}=\int_0^l Q\Big|_{y=0}^{y=h}dx \quad \text{и} \quad P\Big|_{x=0}^{x=l}=Q\Big|_{y=0}^{y=h}=0,$$
$$\text{поскольку } \varphi,\psi,\chi\in so_V^\infty \text{ и при этом } \varphi\in so_{V1}^\infty \text{ или } \psi\in so_{V2}^\infty.$$

Линейные пространства функций, подобно so_V^∞, оснащенные *плотно инвариантным* элементом объема $\left(\varphi,[\psi,\chi]\right)$ (в указанном выше смысле) и названные в [33] *квазикомпактными алгебрами Ли*, определены и подробно описаны в [15, 33]. Так, коммутатор (8) оказывается *замкнутым* в $so_{V1,2}^\infty$ ($[\varphi,\psi]\in so_{V1,2}^\infty$ при $[\varphi,\psi]\in so_{V1,2}^\infty$), т.е. $so_{V1,2}^\infty$ является *подалгеброй*, причем, *компактной* как обладающей всюду *инвариантным* элементом объема (10) (*при всех* $\varphi,\psi,\chi\in so_{V1,2}^\infty$). Линейное же пространство $so_{V0}^\infty\subset so_{V1}^\infty$ при этом служит общей областью определения операций A и B из (2), рассматриваемых совместно.

Вернемся к профилю (6) и напомним трудности линейного подхода. Снова отметим теорему Романова: плоское течение Куэтта, устойчиво, хотя и локально (при $\nu\ge\nu_*=const>0$), но нелинейно (для уравнений Навье) и в классе трехмерных течений [34].

Сопоставим снова приведенным доводам *в пользу* устойчивости профиля (6) аргументы *против* его устойчивости. Так, теореме Романова [34] об устойчивости *плоского* течения Куэтта в пространстве «возражают» теоремы Иванилова–Яковлева [35] и Вельте [36] о неустойчивости его *цилиндрического* аналога, так, что при уменьшении вязкости $\nu > 0$ и переходе ее через некоторое критическое значение из *цилиндрического* течения Куэтта действительно возникают вихри Тейлора [37].

Однако ввиду наличия кривизны у обтекаемой поверхности профиль цилиндрического течения Куэтта, как отмечалось, не является ни линейным, ни параболическим. Между тем как именно отсутствие кривизны у плоскости и обеспечивает линейность или параболичность профиля *плоского* основного течения (Куэтта, Пуазейля или Рэлея), которая (как оказалось *локально* в отмеченном случае *трехмерных* течений теоремы Романова и как окажется *глобально* в рассматриваемом ниже случае *двумерных* течений) играет решающую роль в его устойчивости.

Таким образом, «устойчивая» теорема Романова и «неустойчивые» теоремы Иванилова, Яковлева и Вельте не противоречат друг другу, но вместе указывают на *существенность кривизны* у обтекаемой поверхности.

Далее, у профиля (6) нет точки перегиба, и только поэтому, как утверждалось выше, он должен быть устойчивым. Однако синусоидальный профиль уже имеет такую точку (из–за которой, собственно, Рейнольдс и выбрал его как первого кандидата в неустойчивые течения [8] (см. Рисунок 3). Однако для *двумерных* возмущений течения Колмогорова этот профиль, как уже отмечалось, оказывается, сначала, при условиях периодичности на стенках канала $y = 0, h$, линейно [12], а потом и нелинейно [13] устойчивым и, наконец, при условиях прилипания на стенках, нелинейно единственным [15] и *устойчивым* [16].

Примечательно, что во всех указанных случаях параметром устойчивости служит уже не число Рейнольдса, а отношение $\alpha = h/l$ высоты (или ширины) канала h к его периоду l (*обратный* фактор, или фактор, обратный к *главному фактору* $l/h = 1/\alpha$): для *периодических* стенок течение Колмогорова устойчиво при $\alpha > 1$ [12, 13], для *твердых* стенок (с условиями прилипания) – при $\alpha > \alpha_1$, где $0.592 < \alpha_1 < 0.593$ – корень некоторого трансцендентного уравнения (лежащий строго в указанных пределах) [39, 40].

Теоремы о локальной и нелинейной устойчивости плоского течения Куэтта [34] и линейной неустойчивости (и, по *теореме* Красносельского *о бифуркации* [23], локальной нелинейной неустойчивости, характеризуемой наличием второго стационарного решения уравнений Навье, ответвляющегося от основного течения при тех же граничных условиях) осесимметричного течения Куэтта [35, 36], о линейной и нелинейной устойчивости (или неустойчивости) *течения Колмогорова* (между периодическими стеками) [12, 13] и глобальной (включая предел исчезающей вязкости) нелинейной единственности и устойчивости *течения Рейнольдса* (с профилем скорости Колмогорова между твердыми стенками с прилипанием) [15, 16, 39, 40] дополняются относящиеся к ним уже упоминавшимися вычислительными экспериментами *для сжимаемого идеального газа* [41–43]. Дополним их приводящими к турбулентности *трехмерными* вихревыми каскадами сдвиговой неустойчивости, обнаруживаемыми в альтернативном случае *вязкой несжимаемой жидкости* [53].

В поддержку аргументов «против» снова напомним *линейное приближение* Орра–Зоммерфельда и связанные с ним нейтральные кривые и асимптотические методы, традиционно относимые к основным возражениям утверждению об устойчивости плоского течения Пуазейля [9, 17]. Как уже отмечалось, отвечающая отмеченному приближению линеаризация на указанном профиле уравнений Навье действительно приводит к отыскиваемому (возражением) неустойчивому асимптотическому решению (уравнений с малым коэффициентом (вязкостью) при старших производных и переменными коэффициентами при младших членах) [17], пусть, с регулярным вырождением (при неограниченном уменьшении малого коэффициента), как для уравнений с постоянными коэффициентами [18]. Однако предельным уравнением при этом снова оказывается *линейное* уравнение Рэлея [9] (вырожденное уравнение Орра–Зоммерфельда), для которого параболический профиль (как основное течение, удовлетворяющее, в частности, стационарным уравнениям Эйлера, линейно приближаемым на этом профиле уравнением Рэлея) уже устойчив (по теореме Рэлея, как не имеющий точек перегиба). Попытки же получить из линейной неустойчивости нелинейную (через бифуркацию, как в упомянутой теореме Красносельского) упираются в невыясненную кратность надлежащего собственного числа соответствующего линеаризованного оператора, которая, чтобы приводить к бифуркации, должна быть нечетной [23].

В обозначенный круг проблем и попадают линейная и тесно связанная с ней (через спектр) локальная нелинейная (или бифуркационная) теории гидродинамической устойчивости, для которых этот круг хотя и представляется «аттрактором» (привлекая универсальностью подхода), но выглядит он действительно довольно «странно» (приводя к отмеченным противоречиям).

3.2. Теорема о безусловной устойчивости.

В отличие от традиционного линейного подхода, где, как у Льва Толстого, «все счастливые семьи» (здесь, линейные уравнения) «похожи друг на друга» (подпадают под общие теоремы), ниже существенно используется коммутатор функции тока и завихренности, или нелинейность (1), которая, как «каждая несчастливая семья», в подтверждение его же слов, «несчастлива по–своему».

Конкретно, профиль (6) оказывается устойчивыми не ввиду отсутствия у него точек перегиба и вообще вне какой–либо связи с его линейной устойчивостью или неустойчивостью, а по причине своей *нормальности*, обеспечиваемой тривиальностью третьей производной $u^x_{*yyy}=0$, которая и «гасит» генерируемые потоком двумерные возмущения в основной нелинейности (8), лишая их «приятной» возможности развиться в неустойчивость:

Теорема 1.1 (***о безусловной устойчивости***). *Профиль (6) устойчив как в идеальной, так и в вязкой двумерной несжимаемой периодической среде канала при всех значениях семи постоянных в граничной задаче (2)–(4), указанных в (4), и при произвольных гладких начальных данных* $\psi(0,x,y)\in so_V^\infty$ *для уравнения (2), удовлетворяющих тем же граничным условиям (т.е. профиль (6) устойчив нелинейно и глобально), а именно для разности* $\varphi=\psi-\psi_*$ *всякого гладкого решения* $\psi=\psi(t,x,y)$ *уравнения (2) из* so_V^∞, *с указанными начальными данными, подчиненного тем же граничным условиям (3) и (4), что и стационарное решение данной задачи* ψ_* *из (5), справедливы оценки*

$$\|\zeta\|=\|\zeta\|_{t=0} \quad \text{при} \quad \nu=0 \quad \text{и всех} \quad \varphi\in so_{V1}^\infty,$$

$$\|\zeta\|\le\|\zeta\|_{t=0}\exp\left(-\pi^2\nu t/h^2\right) \quad \text{при} \quad \nu>0 \quad \text{и всех} \quad \varphi\in so_{V0}^\infty, \tag{1.11}$$

$$\text{где} \quad \zeta=A\varphi, \quad \varphi=\psi-\psi_*, \quad A\equiv-\Delta \quad \text{и} \quad t\ge 0,$$

обеспечиваемые ***нормальностью*** *положения равновесия* ψ_* *механической системы (2)–(4), или вырождением на* ψ_* *генерации* $\left(A\psi_*,[\varphi,A\varphi]\right)$ *возмущений* φ *из* so_{V2}^∞, *т.е. тождеством*

$$\left(A\psi_*,[\varphi,\zeta]\right)=0, \quad \varphi\in so_{V2}^\infty, \tag{1.12}$$

а при наличии вязкости $\nu>0$ *еще и* ***диссипативностью*** *самой системы (2)–(4), или неравенством*

$$(\zeta,B\varphi)\ge(\pi/h)^2\|\zeta\|^2, \quad \varphi\in so_{V0}^\infty. \tag{1.13}$$

Действительно, заменив ψ на $\psi_*+\varphi$ в уравнении (2), с учетом (1), запишем его как *уравнение в вариациях* φ:

$$\zeta_t + \nu B\varphi = [\zeta,\psi] + [A\psi_*,\varphi], \ \psi = \psi_* + \varphi, \ \zeta = A\varphi, \ \varphi \in so^{\infty}_{V0}. \qquad (1.14)$$

Далее, умножив (14) скалярно на 2ζ, получим:

$$2(\zeta,\zeta_t) = (\zeta,\zeta)_t = \|\zeta\|^2{}_t, \ 2(\zeta,[\zeta,\psi]) = \overline{P_y} - \overline{Q_x}, \ P = \zeta^2\psi_x,$$

$$Q = \zeta^2\psi_y, \quad \overline{P_y} = \int_0^l P\Big|_{y=0}^{y=h} dx, \quad \overline{Q_x} = \int_0^h Q\Big|_{x=0}^{x=l} dy \quad и \qquad (1.15)$$

$$P\Big|_{y=0}^{y=h} = Q\Big|_{x=0}^{x=l} = 0,$$

поскольку $\psi_x\big|_{y=0,h} = 0$ и $Q\big|_{x=0}^{x=l} = 0$ ($\psi \in so^{\infty}_{V2}$), и

$$(\zeta,[A\psi_*,\varphi]) - (A\psi_*,[\varphi,\zeta]) = \overline{(\varphi_y\psi_{*yy}\zeta)_x} - \overline{(\varphi_x\psi_{*yy}\zeta)_y} = 0, \qquad (1.16)$$

поскольку $\varphi_y\psi_{*yy}\zeta\Big|_{x=0}^{x=l} = 0$ и $\varphi_x\big|_{y=0,h} = 0$ ($\varphi \in so^{\infty}_{V2}$).

Из полученных тождеств (14)–(16) следует соотношение

$$\|\zeta\|^2{}_t + 2\nu(\zeta,B\varphi) = 2(A\psi_*,[\varphi,\zeta]), \quad \varphi \in so^{\infty}_{V2}. \qquad (1.17)$$

При $\nu = 0$ соотношение (17) и нормальность (12) течения (5), как очевидно, и обеспечивают справедливость первого равенства в (11).

При $\nu > 0$, вместе с нормальностью (12) течения (5) и диссипативностью (13) системы (2)–(4) соотношение (17) влечет оценку

$$\|\zeta\|^2{}_t + 2\varepsilon\|\zeta\|^2 \le \|\zeta\|^2{}_t + 2\nu(A\varphi,B\varphi) = 2(A\psi_*,[\varphi,\zeta]) = 0, \quad \varphi \in so^{\infty}_{V0},$$

$$\varepsilon = \pi^2\nu/h^2,$$

равносильную первому неравенству в (11),

$$\|\zeta\|^2 e^{2\varepsilon t} - \|\zeta\|^2_{t=0} = \int_0^t d\|\zeta\|^2 e^{2\varepsilon s} = \int_0^t \left(\|\zeta\|^2{}_s + 2\varepsilon\|\zeta\|^2\right)e^{2\varepsilon t}ds \le 0,$$

что заканчивает проверку справедливости утверждения теоремы 1.1 при наличии ограничений (12) и (13).

Остается проверить выполнение самих условий (12) и (13). Этому и посвящены приводимые ниже утверждения 1.1–1.11, завершающие доказательство данной теоремы. Проверим выполнение условия (12).

Утверждение 1.1. *Течение* (5) *нормально* (*удовлетворяет* (12)).

Действительно, имеем:

$$\varphi_x\varphi_y=\xi\,,\qquad \varphi_y{}^2-\varphi_x{}^2=2\eta\,,\qquad -\Delta\varphi=\zeta\,,\quad \eta_x-\xi_y=\varphi_x\zeta\,,$$

$$p=\psi_{*yyy}\xi+\psi_{*yy}\varphi_x\zeta=\left(\psi_{*yyy}\varphi_y+\psi_{*yy}\zeta\right)\varphi_x\,,$$

$$q=\psi_{*yyy}\eta+\psi_{*yy}\varphi_y\zeta\,,$$

$$q_x-p_y-\psi_{*yy}\left[\varphi,\zeta\right]=\psi_{*yyy}\left(\eta_x-\xi_y-\varphi_x\zeta\right)-\psi_{*yyyy}\xi=-\psi_{*yyyy}\xi\,,$$

$$\overline{p_y}=\int_0^l p_y\Big|_{y=0}^{y=h}dx\quad и\quad p\Big|_{y=0,h}=\left(\psi_{*yyy}\varphi_y+\psi_{*yy}\zeta\right)\varphi_x\Big|_{y=0,h}=0$$

$$(\varphi_x\Big|_{y=0,h}=0)$$

$$\overline{q_x}=\int_0^h q_x\Big|_{x=0}^{x=l}dy\quad и\quad q_x\Big|_{x=0}^{x=l}=\left(\psi_{*yyy}\eta+\psi_{*yy}\varphi_y\zeta\right)\Big|_{x=0}^{x=l}=0$$

$$(\eta,\varphi_y,\zeta\Big|_{x=0}^{x=l}=0).$$

Следовательно,

$$\left(A\psi_*,\left[\varphi,\zeta\right]\right)=-\overline{\psi_{*yy}\left[\varphi,\zeta\right]}=\overline{p_y}-\overline{q_x}-\overline{\psi_{*yyyy}\xi}=-\overline{\psi_{*yyyy}\xi}\,.$$

Доказательство заканчивает тождество $\psi_{*yyyy}=0$ (или $u^x_{*yyy}=0$).

Для проверки выполнения оставшегося условия (13) нам понадобятся дополнительные свойства операций A и B из нижеследующих утверждений 1.2–1.11:

Утверждение 1.2. *Кроме основной геометрии (7), в* so^∞_{V1} *и* so^∞_{V0} *определены* $A-$*метрика*

$$\left(\varphi,\psi\right)_A\equiv\left(A\varphi,\psi\right)=\overline{\varphi_x\psi_x+\varphi_y\psi_y}=\left(\varphi,A\psi\right)\quad для\quad \varphi,\psi\in so^\infty_{V1}\qquad (A\equiv-\Delta)\tag{1.18}$$

и аналогично вводимая $B-$*метрика* $\left(\varphi,\psi\right)_B$, ***точная****, или согласованная с* $A-$*метрикой в том смысле, что*

$$\left(\varphi,\psi\right)_B\equiv\left(B\varphi,\psi\right)=\left(A\varphi,A\psi\right)=\left(\varphi,B\psi\right)\quad для\quad \varphi,\psi\in so^\infty_{V0}\qquad (B\equiv\Delta\Delta).\tag{1.19}$$

Действительно, имеем:

$$\overline{\varphi_x\psi_x+\varphi_y\psi_y}-(\zeta,\psi)=\overline{(\varphi_x\psi)_x}+\overline{(\varphi_y\psi)_y},$$

$$(A\varphi,A\psi)-(B\varphi,\psi)=\overline{(\zeta_x\psi-\zeta\psi_x)_x}+\overline{(\zeta_y\psi-\zeta\psi_y)_y}\quad(\zeta=A\varphi=-\Delta\varphi),$$

$$\overline{(\varphi_x\psi)_x}=\int_0^h\varphi_x\psi\Big|_{x=0}^{x=l}dy=0,\ \overline{(\zeta_x\psi-\zeta\psi_x)_x}=\int_0^h(\zeta_x\psi-\zeta\psi_x)\Big|_{x=0}^{x=l}dy=0,$$

$$\varphi,\psi\in so_V^\infty,$$

$$\overline{(\varphi_y\psi)_y}=\int_0^l\varphi_y\psi\Big|_{y=0}^{y=h}dx=0,\ \psi\in so_{V1}^\infty,$$

$$\overline{(\zeta_y\psi-\zeta\psi_y)_y}=\int_0^l(\zeta_y\psi-\zeta\psi_y)\Big|_{y=0}^{y=h}dx=0,\ \psi\in so_{V0}^\infty,$$

что немедленно влечет (18) и (19).

Операция A обладает известным полным набором собственных функций из so_{V1}^∞ как нетривиальных решений спектральной задачи

$$A\psi=\lambda\psi,\ \psi\in so_{V1}^\infty,\ \ \textit{или}\ \ (\psi,\chi)_A=\lambda(\psi,\chi)\ \ \textit{для всех}\ \chi\in so_{V1}^\infty,$$
$$\textit{или}\quad\Delta\psi+\lambda\psi=0,\ \psi\Big|_{x=0}^{x=l}=\psi\Big|_{y=0,h}=0,$$

$$\textit{или}\ \ \lambda=\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2\left((\alpha n)^2+\left(\frac{m}{2}\right)^2\right)\ge\lambda_1=\left(\frac{\pi}{h}\right)^2,\quad\alpha=\frac{h}{l},\tag{1.20}$$

$$\psi=\Theta_p^n\Psi_m,\quad p=0,1,\quad n=0,1,2,\dots,\ m=1,2,\dots,$$

$$\Theta_0^n=\cos\frac{2\pi\alpha nx}{h},\qquad\Theta_1^n=\sin\frac{2\pi\alpha nx}{h},\qquad\Psi_m=\sin\frac{\pi my}{h},$$

которые отнесем к *главным модам* системы (2)–(4), принадлежащих соответствующим *главным моментам* λ. Одновременно справедливо

Утверждение 1.3. *Справедливы вложения A–метрики в основную (7), или оценка* $\|\varphi\|\le\lambda_1^{-1/2}\|\varphi\|_A$, $\varphi\in so_{V1}^\infty\subset so_V^\infty$, *и B–метрики в A–метрику, или оценка* $\|\varphi\|_A\le\lambda_1^{-1/2}\|\varphi\|_B$, $\varphi\in so_{V0}^\infty\subset so_{V1}^\infty$, *причем оба* ***вполне непрерывны****, т.е. из ограниченности последовательности в сильной норме* $\|\varphi\|_A$ *вложения* $\|\varphi\|\le\lambda_1^{-1/2}\|\varphi\|_A$ *(в сильной норме* $\|\varphi\|_B$

вложения $\|\varphi\|_A \le \lambda_1^{-1/2}\|\varphi\|_B$*) следует частичная сходимость этой последовательности в его слабой норме* $\|\varphi\|$ *(в норме* $\|\varphi\|_A$*, соответственно).*

Действительно, полная непрерывность вложения A–метрики в основную,

$$\|\varphi\|^2 \le \lambda_1^{-1}\|\varphi\|_A^2, \quad или \quad \overline{\varphi^2} \le \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \overline{\varphi_x^2+\varphi_y^2}, \qquad \varphi \in so_{V1}^{\infty},$$

или вложения соответствующего *пространства Соболева* $\dot{W}_2^1(V)$ *в* $L_2(V)$, хорошо известна [44, 48] и при Фурье–разложении функции $\psi(x,y)$ по модам $\Theta_p^n(x)$ из (20) обеспечивается полной непрерывностью *вложения Пуанкаре–Стеклова* $\int_0^h \Phi^2(y)dy \le (h/\pi)^2\int_0^h \Phi_y^2 dy$. С другой стороны, ограниченность последовательности $\varphi = \varphi_i$, $i = 1,2,\ldots$, в B–норме, $\|\varphi\|_B \le C = const$, затем, точность B–метрики, $\|\varphi\|_B = \|A\varphi\|$, и, наконец, наличие вложения A–нормы в основную, $\|\varphi\|^2 \le \lambda_1^{-1}\|\varphi\|_A^2$, влекут ограниченность φ в A–норме,

$$\|\varphi\|_A \le \lambda_1^{-1/2}\|\varphi\|_B, \ \textit{поскольку}\ \|\varphi\|_A^2 = (\varphi, A\varphi) \le \|\varphi\|\|A\varphi\| \le \lambda_1^{-1/2}\|\varphi\|_A\|\varphi\|_B,$$

а потому – частичную сходимость φ в основной норме (7) (полная непрерывность вложения A–нормы в основную). Отождествляя поэтому, без уменьшения общности, сходящуюся подпоследовательность с исходной, приходим к сходимости и последней в основной норме, а значит (в силу первой из вышеприведенных оценок) и в A–норме:

$$\|\varphi_{ij}\|_A^2 \le \|\varphi_{ij}\|\|A\varphi_{ij}\| \le \|\varphi_{ij}\|\left(\|A\varphi_i\| + \|A\varphi_j\|\right) \le 2C\|\varphi_{ij}\| \ \textit{при}\ \|A\varphi_i\| = \|\varphi_i\|_B \le C,$$

$$\textit{где}\quad \varphi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j,\ i,j = 1,2,\ldots, \quad \textit{и}\quad \|\varphi_{ij}\| \to 0 \quad \textit{при}\quad i,j \to \infty,$$

что заканчивает доказательство.

Переходим непосредственно к проверке выполнения условия (13).

Лекция 5

3.3. Диссипативность на совместных модах.

Для дифференциальной операции B (более высокого порядка, чем A) главных мод (20) уже недостаточно, и, следуя [15], вместо последних будем оперировать *совместными модами* операций B и A, или функциями тока $w \in so_{V0}^{\infty}$, принадлежащими их *совместным моментам* μ в спектральной задаче вида:

$$Bw = \mu Aw, \qquad w \in so_{V0}^{\infty}, \qquad (w,w)_A > 0, \qquad \mu \ge \mu_1 = \|w_1\|_B^2 \big/ \|w_1\|_A^2, \tag{1.21}$$

$$\textit{или} \quad (Aw - \mu w, A\psi) = (w,\psi)_B - \mu(w,\psi)_A = 0 \quad \textit{при всех} \quad \psi \in so_{V0}^{\infty}.$$

Утверждение 1.4. *Наименьший совместный момент* μ_1 *не меньше наименьшего главного момента:* $\lambda_1 \le \mu_1$.

Действительно, $so_{V0}^{\infty} \subset so_{V1}^{\infty}$, а потому в силу (20), (21), утверждения 3 и неравенства Коши–Буняковского их отношение

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \lambda_1 \frac{\|w_1\|_A^2}{\|w_1\|_B^2} = \lambda_1 \frac{\|w_1\|_A^2}{\|Aw_1\|^2} \le \frac{\|w_1\|_A^2}{\|w_1\|^2} \frac{\|w_1\|_A^2}{\|Aw_1\|^2} = \left(\frac{(w_1, Aw_1)}{\|w_1\| \|Aw_1\|} \right)^2 \le 1,$$

что и требовалось показать.

Разделяя переменные в стандартной записи условий (21),

$$\Delta(\Delta + \mu) w = 0, \qquad w\Big|_{x=0}^{x=l} = 0, \qquad w\big|_{y=0,h} = w_y\big|_{y=0,h} = 0, \tag{1.22}$$

находим совместные моды w и моменты μ:

$$w = w_{p,m}^n = \Theta\Phi, \qquad p = 0,1, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad m = 2k-1,\ 2k, \quad k = 1,2,..,$$

$$\Theta = \Theta(x) = \Theta_p^n, \quad \Theta_0^n = \cos Nx, \quad \Theta_1^n = \sin Nx, \quad \Phi = \Phi(y) = \Phi_m^n, \tag{1.23}$$

$$\mu = N^2 + M^2, \quad N = \frac{2\pi n}{l} = \frac{2\pi\alpha n}{h}, \quad M = \frac{2\pi}{h}\beta_m^n,$$

или $\mu = \mu_{nm} = L^{-2}\gamma$, *где* $L = h/2\pi$ *и* $\gamma = \gamma_{nm} = (\alpha n)^2 + \left(\beta_m^n\right)^2$,

где *поперечные* числа β_m^n и принадлежащие им гармоники Φ_m^n и распадаются по нижнему индексу m на *нечетные*,

$$\Phi_m^0 = 1 - (-1)^k \cos\frac{\pi\beta_m^0(2y-h)}{h}, \quad m = 2k-1,$$

$$\Phi_m^{n>0} = \cos\frac{\pi\beta_m^n(2y-h)}{h} - \frac{\cos\pi\beta_m^n}{\mathrm{ch}\,\pi\alpha n}\mathrm{ch}\frac{\pi\alpha n(2y-h)}{h}, \tag{1.24}$$

$$\frac{1}{2} < k - \frac{1}{2} < \beta_{2k-1}^{n>0} = k - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{\beta_{2k-1}^{n>0}}{\alpha n\,\mathrm{th}\,\pi\alpha n} < \beta_{2k-1}^0 = k,$$

и *четные*,

$$\Phi_m^0 = \sin\frac{\pi\beta_m^0(2y-h)}{h} - \frac{2y-h}{h}\sin\pi\beta_m^0, \quad m = 2k,$$

$$\Phi_m^{n>0} = \sin\frac{\pi\beta_m^n(2y-h)}{h} - \frac{\sin\pi\beta_m^n}{\mathrm{sh}\,\pi\alpha n}\mathrm{sh}\frac{\pi\alpha n(2y-h)}{h}, \tag{1.25}$$

$$k < \beta_{2k}^{n>0} = k + \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\frac{\beta_{2k}^{n>0}\mathrm{th}\,\pi\alpha n}{\alpha n} < \beta_{2k}^0 = k + \frac{\mathrm{arctg}\,\pi\beta_{2k}^0}{\pi} < k + \frac{1}{2}.$$

Распределение чисел β_m^n по *дискретные сериям* $\beta_{2k-1}^0 = k$, $\beta_{2k-1}^n, \beta_{2k}^0$, β_{2k}^n иллюстрирует Рисунок 6.

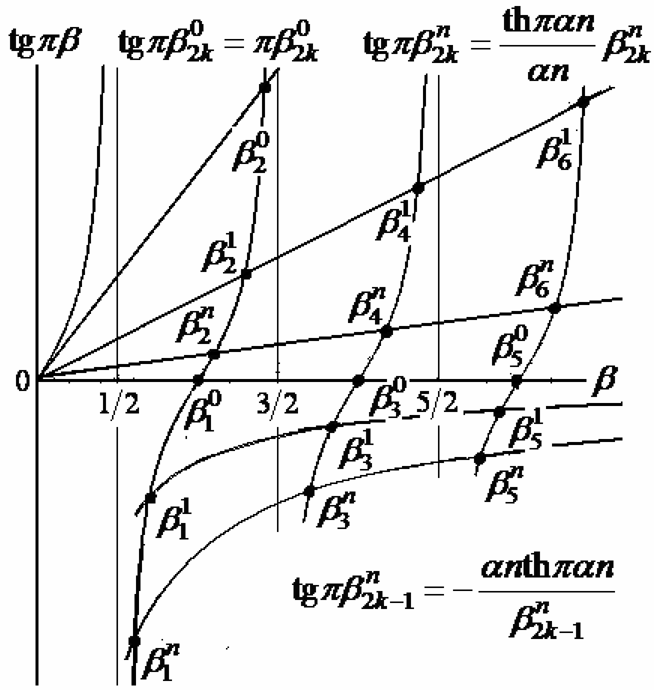

Рисунок 6. Серии чисел $\beta^0_{2k-1} = k$, β^n_{2k-1}, β^0_{2k}, β^n_{2k} из (24), (25).

Утверждение 1.5. *Моды (23)–(25) попарно* A,B*–ортогональны:* $(w,w')_{A,B} = 0$ *при* $w = w^n_{p,m}$, $w' = w^{n'}_{p',m'}$ *и* $(p-p')^2 + (n-n')^2 + (m-m')^2 \neq 0$.

Действительно, с учетом тождеств

$$\left(\Theta^n_p\right)_x = (-1)^{1-p} N\Theta^n_{1-p}, \quad p = 0,1,$$

находим, что

$$(w,w')_A = \square\Theta^n_p\Theta^{n'}_{p'}\left(\square\Phi_y\Phi'_y + NN'(-1)^{2-p-p'}\,\square\Phi\Phi'\right) \quad и \quad \mu' = N'^2 + M'^2,$$

$$где \quad w' = \Theta^{n'}_{p'}\Phi', \ \Phi' = \Phi^{n'}_{m'}, \ \square\Theta^n_p\Theta^{n'}_{p'} = \int_0^l \Theta^n_p\Theta^{n'}_{p'}dx \quad и \quad \square\Phi\Phi' = \int_0^h \Phi\Phi' dy.$$

$$N' = \frac{2\pi\alpha n'}{h}, \ M' = \frac{2\pi\beta^{n'}_{m'}}{h}, \quad p' = 0,1, \quad n' = 0,1,2,\ldots, \ m' = 1,2,\ldots .$$

При $p' \neq p$, или $p' = 1-p$ ($p,p' = 0,1$) имеем:

$$(w,w')_A = 0, \ поскольку \ \square\Theta^n_p\Theta^{n'}_{1-p} = \int_0^{2\pi}\cos\sigma z\sin\tau z dz = 0,$$

$$\sigma,\tau = n,n' = 0,1,2,\ldots$$

При $p' = p$ и $n' = n$ находим:

$$\left(w,w'\right)_A = 0, \quad \textit{поскольку}$$

$$\bar{\Theta}_p^n \Theta_p^{n'} = \int_0^{2\pi} \cos\sigma z \cos\tau z dz = \int_0^{2\pi} \sin\sigma z \sin\tau z dz = 0$$

$$\textit{при } \sigma,\tau = n,n' = 0,1,2,... \ \textit{ и } \sigma \ne \tau \ \ (n \ne n').$$

При оставшихся $p' = p$, $n' = n$ и $m' \ne m$ с помощью (22) получаем:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - N^2\right)\left(\frac{d^2}{dy^2} + M^2\right)\Phi = \Phi_{yyyy} + \left(M^2 - N^2\right)\Phi_{yy} - N^2M^2\Phi = 0,$$
$$\Phi'_{yyyy} + \left(M'^2 - N^2\right)D^2\Phi'_{yy} - N^2M'^2\Phi' = 0, \quad 0 < y < h, \tag{1.26}$$

и

$$\Phi,\Phi',\Phi_y,\Phi'_y\Big|_{y=0,h} = 0, \quad \textit{где} \quad \Phi = \Phi_m^n \quad \textit{и} \quad \Phi' = \Phi_{m'}^n$$
$$\textit{при} \quad M' = 2\pi\beta_{m'}^n \big/ h \ne M = 2\pi\beta_m^n \big/ h, \quad \textit{или} \quad \beta_{m'}^n \ne \beta_m^n. \tag{1.27}$$

Как следствие условий (27),

$$\bar{\Phi}'\Phi_{yy} + \bar{\Phi}'_y\Phi_y = \left(\bar{\Phi}'\Phi_y\right)_y = \Phi'\Phi_y\Big|_{y=0}^{y=h} = 0,$$

$$\bar{\Phi}'\Phi_{yyyy} - \bar{\Phi}'_{yy}\Phi_{yy} = \left(\bar{\Phi}'\Phi_{yyy} - \Phi'_y\Phi_{yy}\right)_y = \left(\Phi'\Phi_{yyy} - \Phi'_y\Phi_{yy}\right)\Big|_{y=0}^{y=h} = 0.$$

Тогда из уравнений (26) заключаем:

$$\bar{\Phi}_{yy}\Phi'_{yy} - \left(M'^2 - N^2\right)\bar{\Phi}_y\Phi'_y - N^2M'^2\bar{\Phi}\Phi' = 0$$

$$\textit{и} \quad \bar{\Phi}'_{yy}\Phi_{yy} - \left(M^2 - N^2\right)\bar{\Phi}'_y\Phi_y - N^2M^2\bar{\Phi}'\Phi = 0 \quad \textit{при} \quad M' \ne M,$$

что возможно только $\bar{\Phi}_y\Phi'_y + N^2\bar{\Phi}\Phi' = 0$ и вместе с тождествами

$$\left(w,w'\right)_B = \mu\left(w,w'\right)_A = \mu\bar{\Theta}^2\left(\bar{\Phi}_y\Phi'_y + N^2\bar{\Phi}\Phi'\right) = 0$$

завершает доказательство.

Утверждение 1.6. *Пары совместных мод* w *и моментов* $\mu = \mu_w$ *из формул (23)–(25), могут быть* ***упорядочены*** *в спектральную последовательность* $w = w_i$, $\mu = \mu_i = \mu_{w_i}$, $i = 1,2,...$, *или* ***спектр,***

(**C1**) ***неубывающий*** *в том смысле, что* $\mu_i \le \mu_{i+1}$, (**C2**) ***разреженный*** *как допускающий лишь конечное число* d_i *совпадений* $\mu_j = \mu_i$ *при* $j \ge i$ *(конечную кратность* d_i *момента* μ_i*) для любого* i *, и, в частности, неограниченный,* $\lim\limits_{i\to\infty} 1/\mu_i = 0$,

(**C3**) ***ортогональный****, или с попарно* A,B*–ортогональными модами,* $\left(w_j, w_i\right)_{A,B} = 0$, $j = i+1, i+2, \ldots$, *при* $\left(w_i, w_i\right)_{A,B} > 0$, *и*

(**C4**) ***полный*** *как исчерпывающий линейными комбинациями первых мод* $w_1,\ldots,w_n$ *решения задачи (21) (или (22)) в* so_{V0}^{∞} *при* $\mu \le \mu_n$, $n = 1,2,\ldots$:

$$w = w_i,\ \mu = \mu_{w_i} = \mu_i = \left(2\pi/h\right)^2 \left(\left(\alpha n_i\right)^2 + \left(\beta_{m_i}^{n_i}\right)^2\right),\quad \mu_i \le \mu_{i+1},$$

$$d_i = \dim_{j\ge i}\left\{\mu_j = \mu_i\right\} < \infty,\ \left(w_j, w_i\right)_A = 0,\ j = i+1, i+2, \ldots,\ i = 1,2,\ldots, \tag{1.28}$$

$$\left(w,\varphi\right)_B = \mu\left(w,\varphi\right)_A \quad \text{при } \varphi \in so_{V0}^{\infty} \quad \text{и} \quad \mu \le \mu_n$$

влечет $w = \kappa_1 w_1 + \ldots + \kappa_n w_n$, $-\infty < \kappa_1,\ldots,\kappa_n < \infty$, $n = 1,2,\ldots$.

Действительно, возможность нумерации дискретного спектра (23)–(25) по не возрастанию, указанная в свойстве (**C1**), очевидна. Свойство (**C3**) установлено в утверждении 1.5. Кратность момента, равная, как очевидно, числу корней $\beta_{m_j}^{n_j}$ уравнения

$$\left(\alpha n_j\right)^2 + \left(\beta_{m_j}^{n_j}\right)^2 = \left(\alpha n_i\right)^2 + \left(\beta_{m_i}^{n_i}\right)^2,\ j \ge i,$$

при фиксированном i, ограничена в силу строго монотонной зависимости корней $\beta_{m_j}^{n_j}$ уравнений из (24) и (25) от номера уравнения n_j (Рисунок 6), что влечет (**C2**). Наконец, полнота (**C4**) подразумевает, что найдены все линейно независимые моды для каждого из моментов $\mu_1,\ldots,\mu_n$. Последнее же следует из известного выполнения указанного условия для решений обыкновенного дифференциального уравнения (26) с граничными условиями (27). Доказательство закончено.

Утверждение 1.7. *Для сумм Фурье*

$$f^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(f, Aw_k\right) w_k}{\left(w_k, Aw_k\right)} \in so_{V0}^{\infty}, \quad Bw_n = \mu_n Aw_n, \quad n = 1,2,\dots, \tag{1.29}$$
$$f \in so_V^{\infty},$$

совместных мод (23)–(25), упорядоченных в спектр (28), справедливы следующие тождества

$$\left(f - f^n, w_m\right)_A = 0, \quad m = 1,\dots,n, \tag{1.30}$$

и

$$B\varphi^n = A\zeta^n \quad и \quad \left(C\varphi, \zeta\right) = \left(C\varphi^n, \zeta\right) + D_n\left(\varphi\right), \; n = 1,2,\dots,$$
$$где \;\; C = B - \mu_1 A \quad и \quad D_n\left(\varphi\right) = \left(\zeta - \zeta^n - \mu_1\left(\varphi - \varphi^n\right), B\varphi\right), \tag{1.31}$$

и оценки

$$\left(C\varphi^n, \zeta\right) \ge 0, \; n = 1,2,\dots, \; \varphi \in so_{V0}^{\infty} \quad (\zeta = A\varphi). \tag{1.32}$$

Действительно, A–ортогональность мод (**C3**) влечет, что

$$\left(f - f^n, Aw_m\right) = \left(f, Aw_m\right) - \left(w_m, Aw_m\right)^{-1}\left(f, Aw_m\right)\left(w_m, Aw_m\right) = 0.$$

С учетом точности B–метрики (13), имеем:

$$\left(\varphi, Aw_k\right) Bw_k = \left(\varphi, Bw_k\right) Aw_k = A\left(\left(A\varphi, Aw_k\right) w_k\right),$$
$$B\varphi^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\varphi, Aw_k\right)}{\left(w_k, Aw_k\right)} Bw_k = A\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(A\varphi, Aw_k\right)}{\left(w_k, Aw_k\right)} w_k = A\left(A\varphi\right)^n.$$

В таком случае

$$\left(C\varphi^n, A\varphi\right) = \left(A\left(A\varphi\right)^n, A\varphi\right) - \mu_1\left(A\varphi^n, A\varphi\right) = \left(\left(A\varphi\right)^n - \mu_1\varphi^n, B\varphi\right),$$
$$\left(C\varphi - C\varphi^n, A\varphi\right) = \left(A\varphi - \left(A\varphi\right)^n - \mu_1\left(\varphi - \varphi^n\right), B\varphi\right).$$

Соотношения

$$\left(Bw_k, A\varphi\right) = \mu_k\left(Aw_k, A\varphi\right) = \mu_k\left(Bw_k, \varphi\right) = \mu_k{}^2\left(\varphi, Aw_k\right),$$
$$\left(B\varphi^n, A\varphi\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\varphi, Aw_k\right)}{\left(w_k, Aw_k\right)}\left(Bw_k, A\varphi\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k{}^2\left(\varphi, Aw_k\right)^2}{\left(w_k, Aw_k\right)} \ge \mu_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k\left(\varphi, Aw_k\right)^2}{\left(w_k, Aw_k\right)}$$
$$= \mu_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\varphi, Aw_k\right)\left(\varphi, Bw_k\right)}{\left(w_k, Aw_k\right)} = \mu_1 \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\varphi, Aw_k\right)\left(Aw_k, A\varphi\right)}{\left(w_k, Aw_k\right)} = \mu_1\left(A\varphi^n, A\varphi\right)$$

завершают доказательство.

Лекция 6

3.4. Полная диссипация возмущений.

Переходим к завершающей части доказательства теоремы 1.1.

Утверждение 1.8. *Вместе с полной непрерывностью вложения* $\|\varphi\|_A \le \lambda_1^{-1/2}\|\varphi\|_B$, $\varphi \in so_{V0}^{\infty}$, *в утверждении 3 упорядоченность совместного спектра (28) предполагает наличие следующих вариационных свойств у его моментов, выполненных для функции Рэлея*

$$R(\chi) \equiv \|\chi\|_B^2 \big/ \|\chi\|_A^2 \ge \mu_{m+1} \text{ при } (\chi, w_k)_A = 0,\ k = 0,1,\dots,m,\ w_0 = 0,$$
$$\chi \in so_V^{\infty},\quad \|\chi\|_A > 0,\quad m = 0,1,\dots. \tag{1.33}$$

Действительно, вложение $\|\varphi\|_A \le \lambda_1^{-1/2}\|\varphi\|_B$ предполагает существование точных нижних граней

$$\mu_{m+1} = \inf_{\varphi \in so_V^{\infty}, \|\varphi\|_A = 1} \left\{ \|\varphi\|_B^2 : (\varphi, w_k)_A = 0, k = 0,1,\dots,m \right\} \ge \lambda_1,\ \ \mu_{m+1} \le \mu_{m+2},$$
$$m = 0,1,\dots,$$

необходимо упорядоченных по неубыванию (поскольку каждая последующая грань μ_{m+2} отыскивается на подмножестве $(\varphi, w_{m+1})_A = 0$ множества, определяющего предыдущую грань μ_{m+1}), и *достижимость* их, $\mu_{m+1} = \lim\limits_{i\to\infty}\|\varphi_i^m\|_B^2$, на *последовательностях* $\varphi_i^m \in so_V^{\infty}$, $\|\varphi_i^m\|_A = 1$, $(\varphi_i^m, w_k)_A = 0$, $k = 0,1,\dots,m$, $i = 1,2,\dots$, со сходящимися, а следовательно ограниченными сильными нормами, $\|\varphi_i^m\|_B \le c^m = const$, и, в силу полной непрерывности вложения $\|\varphi\|_A \le \lambda_1^{-1/4}\|\varphi\|_B$, частично сходящимися в слабой норме. Эти миниминизирующие последовательности, без уменьшения общности, и примем за исходные: $\|\varphi_i^m - \varphi_j^m\|_A \to 0$, $i, j \to \infty$.

Одновременно $\mu_{m+1}\|\varphi_i^m + \varphi_j^m\|_A^2 \le \|\varphi_i^m + \varphi_j^m\|_B^2$ (при $\|\varphi_i^m + \varphi_j^m\|_A = 0$ это неравенство очевидно, при $\|\varphi_i^m + \varphi_j^m\|_A > 0$ оно следует из оценки

$\mu_{m+1} \le \left\|\varphi_{ij}^m\right\|_B^2$ для $\varphi_{ij}^m = \left\|\varphi_i^m + \varphi_j^m\right\|_A^{-1}\left(\varphi_i^m + \varphi_j^m\right)$, $\left\|\varphi_{ij}^m\right\|_A = 1$, $\left(\varphi_{ij}^m, w_k\right)_A = 0$, $k = 0,1,...,m$). Тогда из *равенства прямоугольника*

$$\left\|\varphi - \psi\right\|_{A,B}^2 = 2\left\|\varphi\right\|_{A,B}^2 + 2\left\|\psi\right\|_{A,B}^2 - \left\|\varphi + \psi\right\|_{A,B}^2, \quad \left\|\varphi\right\|_{A,B}^2 = \left(\varphi, \varphi\right)_{A,B},$$

следует сходимость данной последовательности и в сильной норме:

$$\left\|\varphi_i^m - \varphi_j^m\right\|_B^2 = 2\left\|\varphi_i^m\right\|_B^2 + 2\left\|\varphi_j^m\right\|_B^2 - \left\|\varphi_i^m + \varphi_j^m\right\|_B^2 \le 2\left\|\varphi_i^m\right\|_B^2 + 2\left\|\varphi_j^m\right\|_B^2 -$$

$$-\mu_{m+1}\left\|\varphi_i^m + \varphi_j^m\right\|_A^2 = 2\left(\left\|\varphi_i^m\right\|_B^2 - \mu_{m+1}\right) + 2\left(\left\|\varphi_j^m\right\|_B^2 - \mu_{m+1}\right) +$$

$$+\mu_{m+1}\left(2\left\|\varphi_i^m\right\|_A^2 + 2\left\|\varphi_j^m\right\|_A^2 - \left\|\varphi_i^m + \varphi_j^m\right\|_A^2\right) = 2\left(\left\|\varphi_i^m\right\|_B^2 - \mu_{m+1}\right) +$$

$$+2\left(\left\|\varphi_j^m\right\|_B^2 - \mu_{m+1}\right) + \mu_{m+1}\left\|\varphi_i^m - \varphi_j^m\right\|_A^2 \to 0, \; i, j \to \infty.$$

Пусть φ_*^m – соответствующий предел φ_i^m: $\left\|\varphi_*^m - \varphi_i^m\right\|_B^2 \to 0$, $i \to \infty$.

Тогда $R\left(\varphi_*^m\right) = \left\|\varphi_*^m\right\|_B^2 \Big/ \left\|\varphi_*^m\right\|_A^2 = \left\|\varphi_*^m\right\|_B^2 = \mu_{m+1}$ и гладкие вещественные функции

$$r_m(s) = R\left(\varphi_*^m + s\varphi\right) \ge r_m(0), \quad -\left\|\varphi_*^m\right\|_A \Big/ \left\|\varphi\right\|_A < s < \left\|\varphi_*^m\right\|_A \Big/ \left\|\varphi\right\|_A,$$

$$\varphi \in so_V^\infty, \quad \left\|\varphi\right\|_A > 0 \quad (\left\|\varphi_*^m + s\varphi\right\|_A \ge \left\|\varphi_*^m\right\|_A - \left\|\varphi\right\|_A |s| > 0), \quad m = 0,1,...,$$

достигают в $s = 0$ своих локальных минимумов $r_m(0)$ с необходимо нулевыми производными:

$$\frac{dr_m}{ds} = 2\left(\varphi_*^m, \varphi\right)_B - 2r_m(s)\left(\varphi_*^m, \varphi\right)_A, \quad \frac{dr_m}{ds}(0) = 0, \quad r_m(0) = \mu_{m+1}.$$

Следовательно, φ_*^m – моды, принадлежащие моментам μ_{m+1}. Ввиду упорядоченности совместного спектра они исчерпываются линейными комбинациями мод (23)–(25) данных моментов, упорядоченных в (28):

$$\varphi_*^m = \kappa_1 w_1 + ... + \kappa_n w_n, \; -\infty < \kappa_1, ..., \kappa_n < \infty, \; n = m + 1, \; R\left(\varphi_*^m\right) = \mu_{m+1}.$$

Поэтому предположение о нарушении $R(\chi) < \mu_{m+1}$ вариационного свойства (33) для *некоторых* $m = 0,1,...$ и $\chi \in so_V^\infty$ при $\left\|\chi\right\|_A > 0$,

$\left(\chi,w_k\right)_A=0$ и всех $k=0,1,...,m$ в силу вышеприведенных рассуждений привело бы к противоречию: $R\left(\varphi_*^m\right)\le R\left(\chi\right)<\mu_{m+1}$, что завершает доказательство.

Утверждение 1.9. *Справедливы следующие вложенные оценки сходимости Фурье–сумм (29) к своим элементам в нормах основной (7) и A–метрической:*

$$\left\|f-f^n\right\|\le\left\|f-f^n\right\|_A\Big/\sqrt{\lambda_1}\le\left\|f\right\|_B\Big/\sqrt{\lambda_1\mu_{n+1}} \quad и \quad \lim_{n\to\infty}1/\mu_{n+1}=0,\qquad f\in so_V^\infty. \tag{1.34}$$

С учетом разреженности (**С2**) и полноты (**С4**) спектра в утверждении 6, требуемые оценки (34) следуют из (30), (33).

Утверждение 1.10. *В утверждении 7*

$$D_n\left(\varphi\right)\le\left(\left\|\zeta-\zeta^n\right\|+\mu_1\left\|\varphi-\varphi^n\right\|\right)\left\|B\varphi\right\|. \tag{1.35}$$

Оценку (35) влечет последняя формула в (31).

Утверждение 1.11. *Система (2)–(4) диссипативна:* $\left(C\varphi,\zeta\right)\ge 0$, $C=B-\mu_1A$, $\zeta=A\varphi$, $\varphi\in so_{V0}^\infty$ *(т.е. выполнено (13)).*

Утверждение немедленно следует из (31), (32), (34) и (35).

Вместе с оценкой утверждения 4 последнее утверждение завершает доказательство теоремы 1:

$$\left(B\varphi,A\varphi\right)\ge\mu_1\left\|A\varphi\right\|^2\ge\lambda_1\left\|A\varphi\right\|^2=\left(\pi/h\right)^2\left\|A\varphi\right\|^2,\ \varphi\in so_{V0}^\infty.$$

Справедливость теоремы 1.1 полностью установлена.

Лекция 7

3.5. Формальная аналогия с юлой.

Возвращаясь к «несчастливым семьям» (нелинейным уравнениям), упомянутым выше, коснемся механической индивидуальности коммутатора (1) динамической системы (2)–(4). Как очевидно, данная система определяет движения некоторого *волчка* (абсолютно твердого тела с одной закрепленной точкой), с *инерцией* (или оператором моментов инерции) A и *диссипацией* (как оператором трения) B, в *фазовом пространстве* $M = so_V^\infty$, с *геометрией* (φ,ψ) (как эвклидовой метрикой, или скалярным произведением) из (7), *коммутатором* $[\psi,\omega]$ (как векторным произведением) из (1) и (8) и *элементом объема* $(\chi,[\varphi,\psi]) = (\varphi,[\psi,\chi])$, $\psi,\chi \in M$, *инвариантным* к циклической перестановке сомножителей, выводящей один из них, $\varphi \in M_1$, за пределы коммутатора (M_1 – подалгебра алгебры M, т.е. $[\psi,\omega] \in M_1$ при $\psi,\omega \in M_1$) на плотном в M множестве $M_1 = so_{V1}^\infty$ из (9) (его замыкание, или пополнение $\bar{M}_1$ в естественной топологии основной нормы $\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi,\varphi)}$ совпадает с гильбертовым пространством $\bar{M}$ алгебры M: $\bar{M}_1 = \bar{M}$) и тем самым определяющем M как некоторую *квазикомпактную алгебру*.

Отметим, что существование инвариантного объема выше использовалось только в случаях (15) и (16) и в ослабленном варианте, т.е. для более широко класса возмущений $\varphi \in M_2 = so_{V2}^\infty$, или для вращений на *слабо компактных* алгебрах M, с $\bar{M}_2 = \bar{M}$ [38]. При переходе к течению Колмогорова с прилипанием (или к *течению Рейнольдса*) слабая компактность усиливается требованием *квазикомпактности*: $\varphi \in M_1$ и $\bar{M}_1 = \bar{M}$ (при $M_1 \subset M_2$) [39].

Как уже отмечалось, примером фазового пространства M с инвариантным элементом объема служит *компактная* алгебра Ли, где $(\chi,[\varphi,\psi]) = (\varphi,[\psi,\chi])$ *для всех* $\varphi,\psi,\chi \in M$, в частности, *алгебра* $so(3)$ классической *группы Ли* $SO(3)$ вращений обычного (трехмерного) волчка [25, 54–57] (откуда и произошло используемое обозначение so_V^∞ для *алгебры функций тока*), где функции тока ψ

отвечает *угловая скорость*, завихренности ω – *кинетический момент*, геометрии (7) – *эвклидова метрика*, скобкам Пуассона (1) – векторное произведение, *инерции* A – матрица моментов инерции (диагональная в главных осях инерции) и *диссипации* B – инерция кинетического момента, *вязкости* $\nu \geq 0$ – коэффициент трения вращения,

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3),\ \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = A\psi = (\lambda_1\psi_1, \lambda_2\psi_2, \lambda_3\psi_3),$$

$$(\varphi, \psi) = \varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \varphi_3\psi_3,$$

$$[\psi, \omega] = (\psi_2\omega_3 - \psi_3\omega_2, \psi_3\omega_1 - \psi_1\omega_3, \psi_1\omega_2 - \psi_2\omega_1),$$

$$B\psi = A\omega = AA\psi = (\mu_1\psi_1, \mu_2\psi_2, \mu_3\psi_3),\ \mu_{1,2,3} = \lambda_{1,2,3}^2,\ \lambda_{1,2,3} = const > 0,$$

вихревому уравнению Гельмгольца (2) – *динамические уравнения Эйлера*

$$A\psi_t - \nu B\psi + [\psi, A\psi] = \nu f, \quad f = (f_1, f_2, f_3),\ f_{1,2,3} = const,$$

дополненные трением и компенсирующим неизбежные с ним потери энергии (или диссипацию) и исчезающим вместе с трением *моментом внешних сил* νf, *течению* (6) – следующее

Нормальное вращение юлы. При метании диска или вращении монеты на столе, обладая массой m, диаметром l, толщиной h и двумя равными моментами инерции из трех главных моментов

$$\lambda_1 = \lambda_2 = I = ml^2/16 + mh^2/12 \quad и \quad \lambda_3 = J = ml^2/8$$

и компенсирующем трение (при $\nu > 0$) внешнем моменте

$$f = (0, 0, f_3) \ \ или \ \ f = (f_1, f_2, 0)$$

волчок устойчиво вращается как *нормально*, или со скоростью (угловой) ψ_* в своей плоскости, вокруг вертикальной оси третьего момента, как показано в нижней части Рисунка 7, так и *нейтрально*, или со скоростью $\psi_\dagger$, на своем ребре, в любом из ортогональных направлений, перенесенном в верхнюю часть Рисунка 7:

$$\psi_* = (0, 0, \psi_3) \quad или \quad \psi_\dagger = (\psi_1, \psi_2, 0) \quad при \quad \nu\left(\psi_i - \mu_i^{-1} f_i\right) = 0,\ i = 1, 2, 3,$$

так что

$$\psi_{*t}=0, \quad \nu\left(B\psi_*-f\right)=0 \quad и \quad \left[\psi_*, A\psi_*\right]=0 \quad при \quad \chi=\psi_* \ или \ \chi=\psi_\dagger .$$

Причина такой устойчивости – симметрия эллипсоида инерции $\psi_1^2/I+\psi_2^2/I+\psi_3^2/J=1$: в обоих случаях волчок вращается вокруг его короткой или длинной оси, а такие вращения всегда устойчивы (*теорема Эйлера* об устойчивом вращении волчка вокруг наименьшей или наибольшей оси его эллипсоида инерции [58, 59]).

Действительно, как в случае (1) и (5), приходим к аналогичному (14) уравнению в вариациях

$$\zeta_t+\nu B\varphi=\left[\zeta,\psi\right]+\left[A\chi,\varphi\right] \quad для \quad \psi=\chi+\varphi \quad и \quad \zeta=A\varphi ,$$

которое в силу инвариантности объема приводит к уравнению

$$\left|\zeta\right|^2{}_t+2\nu\left(\zeta, A\zeta\right)=2\left(\zeta,\left[A\chi,\varphi\right]\right)=2\left(A\chi,\left[\varphi,\zeta\right]\right), \quad \left|\zeta\right|=\sqrt{\left(\zeta,\zeta\right)},$$

правая часть которого обращается в нуль для *нормального* основного вращения юлы,

$$\zeta=A\varphi=\left(I\varphi_1, I\varphi_2, J\varphi_3\right), \quad \left[\varphi,\zeta\right]=\left(J-I\right)\varphi_3\left(\varphi_2,-\varphi_1,0\right),$$

$$\left(A\chi,\left[\varphi,\zeta\right]\right)=I\left(J-I\right)\varphi_3\left(\psi_1\varphi_2,-\psi_2\varphi_1,0\right)=0, \ \psi_1=\psi_2=0, \ т.е. \ при$$

$$\chi=\psi_*,$$

как и в случае (5) и (12), что иллюстрирует Рисунок 3.

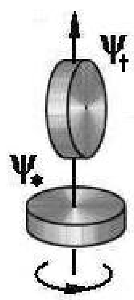

Рисунок 7. Устойчивые вращения диска с угловыми скоростями ψ_* и $\psi_\dagger$: нормальное (внизу) и нейтральное (наверху).

4. Устойчивость синусоидального профиля.

Лекция 8

4.1. Инварианты сдвигового слоя.

Уточним приведенные во введении результаты по задаче Колмогорова [11]. При ограниченном главном факторе (как отношении продольного размера прямоугольной ячейки к поперечному) течение Колмогорова на периодической плоскости устойчиво к бесконечно малым начальным возмущениям [12] и к произвольным конечным возмущениям из *ортогонального дополнения* данного основного течения в *пространстве функций тока* [13, п. 2.2], т.е. в [13] нет оценки *полной нормы* возмущений. Между тем, для «периодических» стенок в [13] эта оценка устанавливается точно также, как в рассматриваемом ниже случае условий прилипания, и предполагает получение более общей оценки устойчивости для течения, рассматриваемого как положение равновесия следующей динамической системы *на алгебре функций тока* [15].

Последней и оказывается *диссипативный волчок*, или волчок с трением, общий случай которого будет рассмотрен позднее. Как уже мы уже видели, в отличии от диффеоморфизмов области течения, сохраняющих элемент объема [25], он действительно доставляет алгебру, не обязанную быть инфинитезимальной составляющей какой–либо группы Ли, но порождаемую скобками Пуассона и граничными условиями следующей смешанной задачи для уравнений вихревого уравнения Гельмгольца, аналогичной рассмотренной выше задаче (1.2)–(1.4). Переходим к ее постановке, которая будет дополнительно учитывать *перемешивание* (наличие нетривиальной в правой часть вихревого уравнения) и *вязкость* $\nu > 0$ несжимаемой среды.

В периодическом канале $-\infty < x < \infty, \quad 0 \le y \le h$, с постоянными периодом l и шириной h, будем рассматривать *гладкие* (бесконечно дифференцируемые) функции тока $\chi(t,x,y)$, $t \ge 0$, плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости, с заданным коэффициентом кинематической вязкости $\nu > 0$. При произвольных начальных данных $\chi_0(x,y) = \chi(0,x,y)$ движение среды поддерживается смещением стенок $y = 0,h$, или относительной скоростью их сдвига $u_h - u_0$ (и условиями прилипания), секундным расходом массы по сечению канала, или разностью значений функции тока на стенках $c_h - c_0$, и внешним ускорением $\mathbf{g} = \mathbf{i}g^x + \mathbf{j}g^y + \mathbf{k}g^z$ с ненулевой компонентой g^x ($g^y = g^z = 0$) из одной моды Фурье $g\sin(2\pi y/h)$:

$$-\Delta\chi_t + \nu\Delta\Delta\chi - \chi_y\Delta\chi_x + \chi_x\Delta\chi_y = f,\ 0 < y < h, \qquad t > 0,$$

$$f = g_x^y - g_y^x = -(2\pi g/h)\cos(2\pi y/h);$$

$$\chi\big|_{t=0} = \chi_0(x,y), \quad \chi\big|_{y=0,h} = c_{0,h}, \quad \chi_y\big|_{y=0,h} = u_{0,h},$$

$$\chi(t,x+l,y) = \chi(t,x,y), \quad -\infty < x < \infty,\ 0 \le y \le h, \quad t \ge 0; \tag{2.1}$$

$$c_{0,h}, u_{0,h}, g, l, h, \nu = const,\ -\infty < c_{0,h}, u_{0,h}, g < \infty,\ \ l, h, \nu > 0;$$

$$\Delta\chi \equiv \chi_{xx} + \chi_{yy},$$

$$\chi \in C^\infty = C^\infty(t \ge 0, -\infty < x < \infty, 0 \le y \le h).$$

Задача (1) допускает 4 *инварианта сдвигового слоя*. Это – сохраняемые перемещением в продольном направлении x с постоянной скоростью a следующие *скорости завихренности* I_ω, *сдвига* I_c, *расхода* I_p и *перемешивания* I_k, где скорость расхода I_p может быть измерена также и величиной *накачки* (падения, или перепада, или градиента давления) p_x в вязкой среде с постоянной плотностью ρ (*закон Хагена–Пуазейля*):

$$I_\omega[\chi'] = -\Delta'\chi'_t + \nu\Delta'\Delta'\chi' - \chi'_y\Delta'\chi'_{x'} + \chi'_{x'}\Delta'\chi'_y = I_\omega[\chi],$$

$$\Delta'\chi' \equiv \chi'_{x'x'} + \chi'_{yy},\ \ I_\omega[\chi] \equiv -\Delta\chi_t + \nu\Delta\Delta\chi - \chi_y\Delta\chi_x + \chi_x\Delta\chi_y,$$

$$I_c[\chi'_y] = I_c[\chi_y] \equiv \left(\chi_y\big|_{y=h} - \chi_y\big|_{y=0}\right)\Big/2 = I_c = (u_h - u_0)/2$$

$$и\quad I_p[\chi'_y] = I_p[\chi_y] \equiv \frac{1}{h}\int_0^h \chi_y dy - \frac{1}{2}\left(\chi_y\big|_{y=h} + \chi_y\big|_{y=0}\right) = I_p,$$

$$где\quad I_p = -p_x h^2 \big/ (12\rho\nu),\quad p_x, \rho = const,\quad \rho > 0,$$

$$I_k[\chi'] = I_k[\chi] \equiv I_k = gL^2/\nu,\quad L = h/2\pi,$$

$$где\ \ \chi' = \chi(t,x,y) - ay\ \ для\ \ x = x' + at.$$

Их следующие однородный линейный, $I_c z$, $z = 2y/h - 1$, симметричный параболический, $1.5I_p\left(1 - z^2\right)$, и простой *гармонический* (или синусоидальный), $I_k \sin\bar{y}$, $\bar{y} = 2\pi y/h$, профили скорости, следовательно, суть тоже инварианты. Они и определяют *основное* (невозмущенное) стационарное решение

$$\chi = \psi = \psi^c + \psi^p + \psi^k,$$

$$\psi^c = c_0 + 0.5h\int_{-1}^{z} u_c(z')dz',\qquad \psi^p = 0.5h\int_{-1}^{z} u_p(z')dz',$$

$$u_c = \bar{u}_c + I_c z,\quad u_p = 1.5I_p\left(1 - z^2\right),\quad -1 \le z = 2y/h - 1 \le 1,$$

$$\bar{u}_c = \frac{u_h + u_0}{2},\qquad I_p = \frac{c_h - c_0}{h} - \bar{u}_c, \tag{2.2}$$

$$\psi^k = \psi_1 = \psi_{01} = L\int_0^{\bar{y}} u_k(\bar{y}')d\bar{y}' = LI_k\varphi_{01}(\bar{y}),\quad L = h/2\pi,$$

$$u_k = I_k \sin\bar{y},\quad \varphi_{01}(\bar{y}) = 1 - \cos\bar{y},\quad 0 \le \bar{y} = y/L \le 2\pi,$$

задачи (1), объединяющее *течения Куэтта* $\psi = \psi^c$ ($I_{p,k} = 0$), *Пуазейля* $\psi = \psi^p$ ($I_{c,k} = \overline{u}_c = 0$) и *Рейнольдса–Колмогорова* $\psi = \psi^k$ ($I_{c,p} = \overline{u}_c = c_0 = 0$).

4.2. Теорема об условной устойчивости.

Для дальнейшего нам понадобиться сравнение двух первых совместных моментов из (1.23), а именно числа $\mu_{02} = L^{-2}\gamma_{02} = const > 0$ и функции $\mu_{11} = L^{-2}\gamma_{11}(\alpha)$ фактора $\alpha > 0$. Имеем:

Лемма 2.1. *Заданная неявно на луче* $\alpha > 0$ *гладкая функция*

$$\gamma_{11}(\alpha) = \alpha^2 + \left(\beta_1^1(\alpha)\right)^2, \quad \frac{1}{2} < \beta_1^1(\alpha) = \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha \operatorname{th}\pi\alpha} < 1,$$

$$\pi = 3.1415926535897932...$$

(см. Рисунок 3) допускает гладкое продолжение в его начало $\alpha = 0$ *и обнаруживает при этом следующие свойства*:

$$\gamma_{11}(+0) = 1, \quad \gamma'_{11}(+0) = 0 \quad (\gamma'_{11} \equiv d\gamma_{11}/d\alpha);$$

$$\gamma'_{11}(\alpha < \alpha_0) < \gamma'_{11}(\alpha_0) = 0 < \gamma'_{11}(\alpha > \alpha_0),$$

$$0.3818 < \alpha_0 = \frac{1}{\pi \operatorname{th}\pi\alpha_0} < 0.3819;$$

$$\gamma_{11}(\alpha_0) < \gamma_{11}(\alpha) < \gamma_{11}(\alpha_1) = 1, \ \alpha_0 < \alpha < \alpha_1,$$

$$0.59293 < \alpha_1 < 0.593;$$

$$\gamma_{11}(\alpha_1) < \gamma_{11}(\alpha) < \gamma_{11}(\alpha_2) = 2, \ \alpha_1 < \alpha < \alpha_2,$$

$$\gamma_{11}(\alpha_2) < \gamma_{11}(\alpha) < \gamma_{11}(\alpha_3) = \gamma_{02} = \left(\beta_2^0\right)^2, \ \alpha_2 < \alpha < \alpha_3,$$

$$1.2 < \alpha_2 < 1.3 < \alpha_3 < 1.4303, \qquad \gamma_{11}(\alpha) > \gamma_{02}, \ \alpha > \alpha_3;$$

$$2.04547204 < \gamma_{02} < 2.04575809,$$

$$1.4302 < \beta_2^0 = 1 + \frac{\operatorname{arctg}\pi\beta_2^0}{\pi} < 1.4303,$$

Действительно, положив

$$\gamma_{11}(\alpha) = \pi^{-2}\Gamma(\eta), \quad \Gamma = \xi^2 + \zeta^2, \quad \xi = \pi\alpha, \quad \zeta = \pi\beta$$

$$\text{и} \quad \alpha = \alpha(\eta) = \frac{\eta}{\pi \operatorname{th}\pi\alpha}, \quad \frac{d\alpha}{d\eta} > 0, \quad \alpha > 0,$$

для функций

$$\xi(\eta) = \xi = \frac{\eta}{\operatorname{th}\xi} \quad \text{и} \quad \zeta(\eta) = \zeta = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\zeta}{\eta}, \quad \eta > 0,$$

убеждаемся в справедливости неравенств

$$\eta + \xi^2 - \eta^2 \geq \eta > 0, \quad \eta^2 - \eta + (1/2)^2 = (\eta - 1/2)^2 \geq 0$$

$$\text{и} \quad \eta^2 + \zeta^2 - \eta \geq \zeta^2 - (1/2)^2 > \left(\pi^2 - 1\right)\big/4 > 0$$

и необходимой единственности достигаемого в точке $\eta = 1$ (в точке α_0, $\eta(\alpha_0) = 1$) минимума функции $\Gamma(\eta)$ (функции $\gamma_{11}(\alpha)$, соответственно):

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} = \frac{2\Gamma\eta(\eta - 1)}{\left(\eta^2 + \zeta^2 - \eta\right)\left(\eta + \xi^2 - \eta^2\right)} > 0(<0) \quad \text{при} \quad \eta > 1(<1).$$

В справедливости оставшихся свойств нетрудно убедиться путем их непосредственной проверки. Доказательство закончено.

Следующая теорема об условной устойчивости по существу является следствием общих «алгебраических» оценок, полученных для стационарного случая (нелинейная глобальная единственность) еще в [14]. Она частично пересекается с теоремой 1.1 о безусловной устойчивости, но предполагает наличие вязкости и *перемешивания* (завихренности поля внешних массовых сил).

Теорема 2.1 (*об условной устойчивости*). *Пусть величины*

$$0.59293 < \alpha_1 < 0.593, \quad 1.2 < \alpha_2 < 1.3 < \alpha_3 < 1.4303$$

$$\text{и} \quad 2.04547204 < \gamma_{02} < 2.04575809$$

*(вычисляемые с любой степенью точности) определены как в лемме 2.1. Тогда без **перемешивания** $g = 0$ или **накачки** $I_p = 0$, определенной как в (2), а в последнем случае при **факторе** $h/l = \alpha > \alpha_1$, основное решение (2) задачи (1) нелинейно глобально асимптотически устойчиво, а именно для любого решения $\chi \in C^\infty$ задачи (1) и ее основного решения ψ из (2) справедливы оценки:*

$$\pi^2 h^{-2} \|\varphi\| \le \pi h^{-1} \left\| \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \right\| \le \|\omega\| = \left(\overline{\overline{\omega^2}} \right)^{1/2} = \left(\int_0^l \int_0^h \omega^2 dx dy \right)^{1/2},$$

$$\omega = -\Delta\varphi, \ \varphi = \chi - \psi, \ \omega_0 = -\Delta\varphi_0, \ \varphi_0 = \chi_0 - \psi,$$

$$\chi_0 = \chi\big|_{t=0},$$

$$\|\omega\| \le \|\omega_0\| \exp(-t/\tau) \quad \text{при} \quad g = 0 \quad \text{и} \quad \alpha > 0,$$

$$\|\omega\| \le \|\omega_0\| \left(1 + \sqrt{q_\alpha}\right) \exp(-\varepsilon_\alpha t/\tau) \quad \text{при} \quad I_p = 0 \quad \text{и} \quad \alpha > \alpha_1, \tag{2.3}$$

$$\text{где} \quad q_{\alpha_2} \equiv q_{\alpha_2}(t) = 4|g| ht/(\pi\nu) \quad \text{и} \quad q_\alpha\big|_{\alpha \ne \alpha_2} \equiv const,$$

$$q_\alpha\big|_{\alpha < \alpha_3, \alpha \ne \alpha_2} = |g| h^3 \gamma_{11}(\alpha) \Big/ \left(4\pi^3 \nu^2 (\gamma_{11}(\alpha) - 1) |\gamma_{11}(\alpha) - 2|\right),$$

$$q_\alpha\big|_{\alpha \ge \alpha_3} = |g| h^3 \gamma_{02} \Big/ \left(4\pi^3 \nu^2 (\gamma_{02} - 1)(\gamma_{02} - 2)\right),$$

$$\varepsilon_{\alpha < \alpha_2} = \gamma_{11}(\alpha) - 1, \quad \varepsilon_{\alpha \ge \alpha_2} = 1, \quad \tau = h^2 \Big/ \left(4\pi^2 \nu\right) \quad \text{и} \quad t \ge 0 .$$

Теорема 2.1 будет следовать из последней леммы 2.1 и приводимых ниже утверждений 2.1–2.11.

Лекция 9

4.3. Алгебра, аксиомы и уравнение волчка.

Для получения оценок (3), следуя [15, 33], определим необходимые детали конструкции диссипативного волчка в форме следующих аксиом (**A1**)–(**A9**), относящихся к его алгебре M, инерции $\tilde{A}$ и диссипации $\tilde{B}$. Предполагаем, что

(**A1**) Определена *оснащенная алгебра* M, т.е. линейное вещественное пространство $M=\{\xi,\eta,\zeta,\partial,u,\upsilon,x,y,..\}$ со скалярным произведением (ξ,η), гильбертовым пространством $H=\bar{M}$ (замыканием M в норме скалярного произведения), коммутатором $[\xi,\eta]$, выделенной нетривиальной *коммутативной* компонентой (или *коммутантой*) M' и *слабой*, M_2, *сильной*, M_1, и *центральной* компонентами (*центром*) M_0, такими, что

$$(\xi,\eta)=(\eta,\xi),\ \|\xi\|=\sqrt{(\xi,\xi)},\ [\xi,\eta]=-[\eta,\xi]\in M,$$

$$\partial[\xi,\eta]=[\partial\xi,\eta]+[\xi,\partial\eta],\ \partial\xi\equiv[\partial,\xi],\quad \xi,\eta,\partial\in M,$$

$$M_2=\{\eta\in M:\ (\xi,[\eta,\zeta])=(\zeta,[\xi,\eta]),\ \zeta,\xi\in M\}=$$

$$=\{\eta\in M:\ (\xi,[\eta,\xi])=0,\ \xi\in M\},$$

$$M_1=\{\zeta\in M:\ (\xi,[\eta,\zeta])=(\zeta,[\xi,\eta]),\ \xi,\eta\in M\},$$

$$M_0=\{\xi\in M:\ [\xi,\eta]=0,\ \eta\in M\},$$

$$M'=\{\xi,\eta,\zeta,...\in M:\ [\xi,\eta]=[\eta,\zeta]=...=0\}.$$

Как уже отмечалось, элементы алгебры M естественно рассматривать как многомерные аналоги угловых скоростей. Условимся их кратко называть *вращениями*. Алгебра вращений M *коммутативна*, если $M'=M$, *компактна*, если $M_1=M$, *квазикомпактна*, если

$\bar{M}_1 = H$ и *слабо компактна*, если $\bar{M}_2 = H$. При этом подпространство (линейное) N алгебры M будем относить к ее *подалгебре* и отмечать записью $N \hookrightarrow M$, если коммутатор *замкнут* в его пределах, т.е. $\xi, \eta \in N$ влечет $[\xi, \eta] \in N$.

Утверждение 2.1. *Коммутатор* M *замкнут в пределах компонент* $N = M', M_p \hookrightarrow M$, $p = 0,1,2$, *компактных,* $N_1 = N$, *и подчиненных включениям* $M_0 \hookrightarrow M'$ *и* $M_0, M_1 \hookrightarrow M_2 \hookrightarrow M$.

Действительно, воспользовавшись *тождеством Якоби* (приведенной выше формулой «дифференцирования по частям», с коммутатором $\partial\xi \equiv [\partial, \xi]$ в роли производной), находим, что $M_2 \hookrightarrow M$: $\left(u,\left[u,[x,y]\right]\right) = \left(u,\left[[u,x],y\right]\right) - \left(u,\left[[u,y],x\right]\right) = \left([u,x],[y,u]\right) - \left([u,y],[x,u]\right) = 0$, $u \in M$. Сужая определяющее M_2 *первое тожество* $\left(\xi,[\eta,\zeta]\right) = \left(\zeta,[\xi,\eta]\right)$, $\eta \in M_2$, на вращениях $\zeta, \xi \in M_2$, получаем: $M_2 = M_{21}$. Полагая $\xi = \eta \in M$ в задающем M_1 тождестве $\left(\xi,[\eta,\zeta]\right) = \left(\zeta,[\xi,\eta]\right)$, $\zeta \in M_1$, получаем определяющее M_2 *второе тождество* $\left(\eta,[\eta,\zeta]\right) = 0$, $\eta \in M_2$, $\zeta \in M$, равносильное первому (замена η на сумму $\xi + \eta$ во втором тождестве приводит к первому, сужение последнего на диагонали $\xi = \eta$ – ко второму, в силу *кососимметричности* коммутатора, $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$). Следовательно, $M_1 \subset M_2$. Тогда для любых $x, y \in M_1$ и $u, \upsilon \in M$

$$\begin{aligned}
&\left(u,\left[\upsilon,[x,y]\right]\right) = \left(u,\left[[\upsilon,x],y\right]\right) + \left(u,\left[x,[\upsilon,y]\right]\right) = \left(y,\left[u,[\upsilon,x]\right]\right) + \\
&+\left([\upsilon,y],[u,x]\right) = \left(y,\left[[u,\upsilon],x\right]\right) + \left(y,\left[\upsilon,[u,x]\right]\right) - \left([y,\upsilon],[u,x]\right) = \\
&= \left([u,\upsilon],[x,y]\right) + \left([u,x],[y,\upsilon]\right) - \left([u,x],[y,\upsilon]\right) = \left([x,y],[u,\upsilon]\right),
\end{aligned}$$

т.е. $\left[x,y\right]\in M_1$, или $M_1 \hookrightarrow M_2$. Далее, сужая определяющее M_1 тождество на $\xi,\eta\in M_1$, находим, что $M_{11}=M_1$. Замкнутость коммутатора в пределах центра M_0 и компоненты M' снова следуют из тождества Якоби: $\left[u,\left[x,y\right]\right]=\left[\left[u,x\right],y\right]+\left[x,\left[u,y\right]\right]=0$ при $\left[u,x\right]=0$ и $\left[u,y\right]=0$. При этом $M_0\subset M'$ (что очевидно), а значит $M_0 \hookrightarrow M'$. Поскольку $\left(\xi,\left[\eta,\zeta\right]\right)=\left(\zeta,\left[\xi,\eta\right]\right)=0$ для $\xi,\eta,\zeta\in M_0$ или $\xi,\eta,\zeta\in M'$ (тождества $\left[\xi,\eta\right]=\left[\eta,\zeta\right]=0$), алгебры M_0 и M' компактны. Наконец, $\left(\eta,\left[\eta,\zeta\right]\right)=0$, $\eta\in M_2$, $\zeta\in M_0$, в тождества $\left[\eta,\zeta\right]=0$, а потому $M_0 \hookrightarrow M_2$, что завершает доказательство.

(**A2**) В линейном пространстве алгебры M определены *инерция* $\tilde{A}$ и *диссипация* $\tilde{B}$, как линейные операторы $\tilde{A},\tilde{B}:M\to M$, с вложенными областями определения $D_{\tilde{A}}\supset D_{\tilde{B}}=\tilde{D}$, перестановочные с дифференцированием по *времени* $t>0$, $\tilde{A}\partial_t=\partial_t\tilde{A}$, $\tilde{B}\partial_t=\partial_t\tilde{B}$ (не зависящие от указанного параметра).

(**A3**) Операторы $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ обладают сужениями $A,B:M\to M$, $\tilde{A}\xi=A\xi$, $\xi\in D_A$, $\tilde{B}\eta=B\eta$, $\eta\in D_B$, с вложенными областями определения $D_A\supset D_B=D$, такими, что при любых $\xi,\eta\in D_{\tilde{A}}$ ($\xi,\eta\in\tilde{D}$) разность $\xi-\eta\in D_A$ ($\xi-\eta\in D$, соответственно).

(**A4**) Инерция $\tilde{A}$ определена в пределах слабой компоненты M_2 ($D_{\tilde{A}}\subset M_2$), ее сужение A – в пределах сильной компоненты M_1 ($D_A\subset M_1$), его область определения D_A плотна в H и алгебра M необходимо *квазикомпактна* ($D_A\subset M_1$ и $\overline{D}_A=H$).

(**А5**) *Генерации* $\left(A\eta,[\xi,\eta]\right)$ *возмущений* $\eta\in D_A$, производимые *вращениями* $\xi\in M$, локально ограничены *энстрофией* $\|A\eta\|^2$, т.е. для каждого вращения ξ существует постоянная $\sigma(\xi)$, такая, что

$$\left|\left(A\eta,[\xi,\eta]\right)\right|\le\sigma(\xi)\|A\eta\|^2,\quad \eta\in D_A,\quad \xi\in M,\quad 0<\sigma(\xi)<\infty, \tag{2.4}$$

(**А6**) Сужение инерции A является *нормальным*, т.е. симметрично и положительно, с постоянной $\mu_0=\lambda_1>0$:

$$(\xi,\eta)_A=(A\xi,\eta)=(\xi,A\eta),\ \xi,\eta\in D_A,$$

$$\text{и}\quad \mu_0=\lambda_1=\inf\left\{\|\xi\|_A^2:\xi\in D_A,\|\xi\|=1\right\}>0,\ \ \|\xi\|_A=\sqrt{(\xi,\xi)_A}\,.$$

(**А7**) Сужение диссипации B является *точным*, т.е. его билинейная форма равна скалярному произведению *кинетических моментов* (образов инерции), $(B\xi,\eta)=(A\xi,A\eta)$, $\xi,\eta\in D$, а потому B симметрично и положительно: $\|A\xi\|\|\xi\|\ge(A\xi,\xi)\ge\mu_0\|\xi\|^2$, $\|A\xi\|\ge\mu_0\|\xi\|$, $(B\xi,\xi)=\|A\xi\|^2\ge\mu_0^2\|\xi\|^2$, $\xi\in D$.

(**А8**) Сужение диссипации B является *полным* в том смысле, что решениями ζ и μ *совместной* спектральной задачи $B\zeta=\mu A\zeta$, $\zeta\in D$, $\mu=const$, служат соответственно *совместные моды* ζ, образующие полную и ортогональную систему в скалярном произведении инерции $(\xi,\eta)_A$ из (А6), и их *совместные моменты* μ, образующие *дискретный* (без конечных предельных точек) *спектр* $P\sigma AB$ рассматриваемой задачи:

$$B\zeta=\mu A\zeta,\quad \text{или}\quad (B\zeta,\eta)=(A\zeta,A\eta)=\mu(\zeta,\eta)_A$$

$$\text{при всех}\quad \eta\in D\ \ \text{и некоторых}\ \ \zeta\in D,\ \zeta\ne0,\ \ \text{и}\ \ \mu=const, \tag{2.5}$$

$$\text{влечет}\ \zeta=\mathrm{e}_i\ \ \text{и}\ \ \mu=\mu_i=\kappa_i^{-1}(A\mathrm{e}_i,A\mathrm{e}_i),\ \kappa_i=(A\mathrm{e}_i,\mathrm{e}_i)>0,$$

$$\left(B\mathrm{e}_i,\mathrm{e}_j\right)=\left(A\mathrm{e}_i,A\mathrm{e}_j\right)=\left(A\mathrm{e}_i,\mathrm{e}_j\right)=0 \;\; \textit{при} \quad i\neq j,$$

$$0<\mu_1=\ldots=\mu_{r_1}<\mu_1'=\mu_{r_1+1}=\ldots=\mu_{r_1+r_2}<\mu_{r_1+r_2+1}\cdots,$$

$$0<r_i<\infty,\quad i,j=1,2,..,$$

$$P\sigma AB=\left\{\mu_1<\mu_{r_1+1}<\mu_{r_1+r_2+1}<..\right\},\quad \lim_{m\to\infty}\mu_m^{-1}=0,$$

$$\textit{причем}\;\; \lim_{m\to\infty}\left\|\xi-\xi^m\right\|_A=0 \quad \textit{для любого} \quad \xi\in D$$

$$\textit{и сумм Фурье}\;\; \xi^m=F_m\xi=\sum_{1\le i\le m}\xi_{(i)}\mathrm{e}_i,\;\; \textit{где}\quad \xi_{(i)}=\kappa_i^{-1}\left(\xi,A\mathrm{e}_i\right).$$

(**A9**) Ядро наименьшего совместного момента μ_1 *примитивно* в том смысле, что $B\zeta=\mu_1 A\zeta$ влечет $A\zeta-\mu_1\zeta\in M_0$ *и* $\zeta\in M'$.

Задавшись моментом внешних сил, или *внешним моментом* f и *начальным вращением* χ_0, в сделанных предположениях (A1)–(A9) будем рассматривать соотношение

$$\begin{gathered}\tilde{A}\chi_t+\nu\tilde{B}\chi+\left[\chi,\tilde{A}\chi\right]=f,\;\; t>0,\;\; \nu=const\ge 0,\;\; \chi\big|_{t=0}=\chi_0,\\ \chi=\chi\left(t\ge 0\right)\in\tilde{D}_\nu,\quad \tilde{D}_0=D_{\tilde{A}},\quad \tilde{D}_{\nu>0}=\tilde{D},\\ \chi-\psi\in D_\nu \quad \textit{при}\quad \chi,\psi\in\tilde{D}_\nu,\;\; D_0=D_A,\quad D_{\nu>0}=D,\\ f=f\left(t\right)\in M \qquad \left(\chi_t\equiv\partial_t\chi\equiv\partial\chi/\partial t\right),\end{gathered} \tag{2.6}$$

как *уравнение диссипативного волчка*, или *диссипативный волчок*, или, кратко, *волчок*.

Лекция 10

4.4. Нормальные и центральные вращения.

Проведем предварительный анализ инерции и диссипации волчка.

Утверждение 2.2. *Условия (А6)–(А8) предполагают сходимость в* H *сопряженных сумм Фурье* ξ_*^m, $A-$ *и* $B-$ *образов сумм Фурье* ξ^m, *а также следующие оценки для энстрофии* $e(\xi)=\|A\xi\|^2$, *скалярной диссипации* $d(\xi)=(A\xi,B\xi)$, *и их дефектов* $e_\mu(\xi)=(A_\mu\xi,A\xi)$ *и* $d_\mu(\xi)=(A_\mu\xi,B\xi)$, $A_\mu\equiv A-\mu$, *на постоянной* $\mu=const$, *при совпадении последней с наименьшем совместным моментом* μ_1*:*

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\xi-\xi_*^m\right\|=0,\ \xi\in H,\ \xi_*^m=F_m^*\xi=\sum_{1\le i\le m}\xi_{(i)}^*A\mathrm{e}_i,\ \xi_{(i)}^*=\kappa_i^{-1}\left(\xi,\mathrm{e}_i\right);$$

$$\lim_{m\to\infty}\left\|A\xi-A\xi^m\right\|=0,\ \lim_{m\to\infty}\left\|B\xi-B\xi^m\right\|=0,\ \xi\in D,$$

$$d(\xi)\ge\mu_1 e(\xi),\quad \mu_1\ge\mu_0,\quad d(\xi)\equiv(A\xi,B\xi),\quad e(\xi)\equiv\|A\xi\|^2,$$

$$e(\xi')\ge e_{\mu_1}(\xi)=e_{\mu_1}(\xi')\ge\left(1-\mu_1/\mu_1'\right)e(\xi'),\qquad \xi'=\xi-\xi_1\in D,$$

$$d_{\mu_1}(\xi)=d_{\mu_1}(\xi')\ge\left(\mu_1'-\mu_1\right)e(\xi'),\ \ \xi_1=\sum_{1\le i\le r_1}\xi_{(i)}\mathrm{e}_i,\ \ \mu_1'=\mu_{r_1+1}>\mu_1.$$

Действительно, (А6)–(А8) влекут

$$\frac{\mu_0}{\mu_1}=\frac{\lambda_1}{\mu_1}=\frac{\mu_0\left(\mathrm{e}_1,A\mathrm{e}_1\right)}{\left(B\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_1\right)}=\frac{\mu_0\left(\mathrm{e}_1,A\mathrm{e}_1\right)}{\left(A\mathrm{e}_1,A\mathrm{e}_1\right)}\le\frac{\left(\mathrm{e}_1,A\mathrm{e}_1\right)^2}{\left(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_1\right)\left(A\mathrm{e}_1,A\mathrm{e}_1\right)}\le 1.$$

При этом (А8) означает полноту (замкнутость линейной оболочки) мод e_i в норме скалярного произведения $(\xi,A\eta)$, $\xi,\eta\in D$. Последнее равносильно требованию: $(\xi,A\mathrm{e}_i)=0$, $i=1,2,...$, влечет $\xi=0$. Это же требование означает полноту в H ортогональных мод $A\mathrm{e}_i$, $i=1,2,...$, что обеспечивает сходимость в H определенных выше сопряженных сумм. Одновременно тождества

$\left(A\xi, A\mathrm{e}_i\right) = \left(\xi, B\mathrm{e}_i\right) = \mu_i\left(\xi, A\mathrm{e}_i\right) = 0$, $i = 1,2,...,$ влекут $\xi = 0$, т.е. полноту мод e_i в норме скалярного произведения $\left(A\xi, A\eta\right)$, а значит и сходимость их сумм Фурье в норме данного скалярного произведения, что равносильно сходимости в H A–образов сумм Фурье. Наконец, сходимость сопряженных сумм влечет сходимость B– образов сумм Фурье, поскольку

$$\kappa_i\mu_i\xi_{(i)} = \mu_i\left(\xi, A\mathrm{e}_i\right) = \left(\xi, B\mathrm{e}_i\right) = \left(B\xi, \mathrm{e}_i\right) = \kappa_i\left(B\xi\right)^*_{(i)},$$

$$B\xi^m = \sum_{1\le i\le m}\mu_i\xi_{(i)}A\mathrm{e}_i = \sum_{1\le i\le m}\left(B\xi\right)^*_{(i)}A\mathrm{e}_i = \left(B\xi\right)^m_*, \quad \xi \in D_B.$$

Тогда в силу (A7) и (A8)

$$d\left(\xi\right) - \mu_1 e\left(\xi\right) = \left(B\xi - \mu_1 A\xi, A\xi\right) = C\left(\xi\right) = C\left(\xi^m\right) + \varepsilon_m,$$

$$C\left(\xi^m\right) = \sum_{1\le i\le m}\kappa_i\mu_i\left(\mu_i - \mu_1\right)\xi^2_{(i)} \ge 0, \quad m = 1,2,..,$$

$$\varepsilon_m = \left(B\xi - \left(B\xi\right)^m_*, A\xi\right) - \mu_1\left\|A\xi - A\xi^m\right\|^2 \to 0, \quad m \to \infty,$$

а значит $C\left(\xi\right) \ge 0$. Выкладки

$$\left(\xi', \xi_1\right) = \left(A\xi', \xi_1\right) = \left(A\xi', A\xi_1\right) = \left(A_\mu\xi', A\xi_1\right) = 0,$$

$$\left(A_{\mu_1}\xi_1, A\eta\right) = \left(A_{\mu_1}\eta, A\xi_1\right) = \left(B\xi_1 - \mu_1 A\xi_1, \eta\right) = 0,$$

$$\textit{а потому}\ \ e_{\mu_1}\left(\xi\right) = \left(A_{\mu_1}\xi, A\xi\right) = \left(A_{\mu_1}\xi', A\xi'\right) = e_{\mu_1}\left(\xi'\right),$$

$$\textit{далее,}\ \ \left(A_{\mu_1}\eta, B\xi_1\right) = \mu_1\left(A\eta, A_{\mu_1}\xi_1\right) = \mu_1\left(\eta, B\xi_1 - \mu_1 A\xi_1\right) = 0,$$

$$\left(A_{\mu_1}\xi_1, B\eta\right) = \left(A\xi_1, B\eta - \mu_1 A\eta\right) = \left(A\xi_1, B\eta' - \mu_1 A\eta'\right) = \left(A\xi_1, B\eta'\right),$$

$$\textit{и}\ \ \left(A\xi_1, B\eta'\right) - \left(A\xi_1, B\eta'^m\right) = \left(A\xi_1, B\eta' - \left(B\eta'\right)^m_*\right) \to 0, \quad m \to \infty,$$

$$\left(A\xi_1, B\eta'^m\right) = 0,\ \textit{следовательно,}\ \ \left(A_{\mu_1}\xi_1, B\eta\right) = \left(A\xi_1, B\eta'\right) = 0,$$

наконец, $e(\xi')=\sum\limits_{i>d_1}\xi_{(i)}^2\|A\mathrm{e}_i\|^2\ge e_{\mu_1}(\xi')=\sum\limits_{i>d_1}\xi_{(i)}^2(1-\mu_1/\mu_i)\|A\mathrm{e}_i\|^2\ge$

$$\ge(1-\mu_1/\mu_1')e(\xi') \ \ \text{и} \ \ d_{\mu_1}(\xi)=\left(A_{\mu_1}\xi,B\xi\right)=\left(A_{\mu_1}\xi',B\xi'\right)=d_{\mu_1}(\xi')=$$

$$=\sum_{i>r_1}\xi_{(i)}^2\mu_i(\mu_i-\mu_1)(\mathrm{e}_i,A\mathrm{e}_i)\ge(\mu_1'-\mu_1)\|A\xi'\|^2,$$

заканчивают доказательство.

В уравнении (6) зафиксируем правую часть f. Тогда для разности $\varphi=\chi-\psi$ любых его решений $\psi,\chi\in D_\nu$ справедливо равносильное ему *уравнение возмущений* (или *уравнение в вариациях*)

$$\begin{gathered}A\varphi_t+\nu B\varphi=F(\psi,\varphi),\ t>0,\ \varphi_0\equiv\varphi\big|_{t=0}=\chi_0-\psi_0,\ \varphi\in D_\nu,\ t\ge0,\\ F(\psi,\varphi)\equiv[A\varphi,\chi]+\left[\tilde{A}\psi,\varphi\right],\quad \chi=\psi+\varphi,\end{gathered}\tag{2.7}$$

вытекающее непосредственно из тождества

$$\left[\tilde{A}\chi,\chi\right]-\left[\tilde{A}\psi,\psi\right]=[A\varphi,\chi]+\left[\tilde{A}\psi,\psi+\varphi\right]-\left[\tilde{A}\psi,\psi\right]=F(\psi,\varphi).$$

Утверждение 2.3. *Для всякой пары решений* $\psi,\chi\in\tilde{D}$ *уравнения (6), с фиксированной правой частью* f, *при любой постоянной* $-\infty<\mu<\infty$ *справедливо тождество*

$$0.5e_{\mu t}(\varphi)+\nu d_\mu(\varphi)=\left(A\varphi,\left[\tilde{A}_\mu\psi,\varphi\right]\right),\ t>0,\ \tilde{A}_\mu\equiv\tilde{A}-\mu.\tag{2.8}$$

Действительно, умножив (7) скалярно в H на $A_c\varphi$, получим (8) с правой частью

$$\left(A\varphi,[A\varphi,\chi]+\left[\tilde{A}\psi,\varphi\right]\right)-\mu\left(\varphi,[A\varphi,\psi+\varphi]+\left[\tilde{A}\psi,\varphi\right]\right),$$

которая в силу тождеств $\left(A\varphi,[A\varphi,\chi]\right)=0$ (поскольку $\chi\in\tilde{D}_A\subset M_2$)

$$\left(\varphi,[A\varphi,\varphi]\right)=0,\quad \left(\varphi,\left[\tilde{A}\psi,\varphi\right]\right)=0 \quad \text{и} \quad \mu\left(\varphi,[A\varphi,\psi]\right)=\left(A\varphi,[\mu\psi,\varphi]\right)$$

(поскольку $\varphi\in D_A\subset M_1$), приводится к искомой правой части в (8).

Утверждение 2.4. *При* $\nu \geq 0$ *для нормального вращения* $\psi \in \tilde{D}_\nu$ *волчка (6), как отвечающего вырожденной генерации возмущений из (A5), производимых кинетическим моментом* $\tilde{A}\psi$*, т.е. для* $\sigma\left(\tilde{A}\psi\right) = 0$ *в (4), при произвольном вращении* $\chi \in \tilde{D}_\nu$ *волчка (6), справедливы следующие оценки устойчивости:*

$$\|A\varphi\| = \|A\varphi_0\| \quad \textit{при} \quad \nu = 0$$

$$\textit{или} \quad \|A\varphi\| \leq \|A\varphi_0\| \exp(-t/\tau) \leq \|A\varphi_0\| \exp\left(-\mu_0 t/(\mu_1 \tau)\right) \quad \textit{при} \quad \nu > 0,$$

$$\textit{где} \quad \tau = 1/(\mu_1 \nu), \quad t \geq 0, \quad \varphi = \chi - \psi, \quad \gamma\left(\tilde{A}\psi\right) = 0.$$

Действительно, с учетом оценок утверждения 2.2, приведенные соотношения следуют из тождества (8) с $\mu = 0$:

$$e_t + 2\nu\mu_0 e \leq e_t + 2\nu\mu_1 e \leq e_t + 2\nu d = 0, \quad \nu \geq 0, \quad \mu_0 \leq \mu_1,$$

$$e = \|A\varphi\|^2, \quad d = (A\varphi, B\varphi).$$

Утверждение 2.5. *При* $\nu > 0$ *для центрального вращения волчка (6),* $\psi = \psi^c + \psi_1$*, слагаемого из нейтрального вращения* $\psi^c \in \tilde{D}$*, как обладающего вырожденной генерацией (A5), производимой им самим и его кинетическим моментом, т.е. для* $\sigma\left(\psi^c\right) = \sigma\left(\tilde{A}\psi^c\right) = 0$ *в (4), и вращения* $\psi_1 \in \tilde{D}$ *из примитивного ядра в (A9) наименьшего совместного момента* μ_1 *из (A8), при произвольном вращении* $\chi \in \tilde{D}$ *волчка (6), справедливы следующие оценки устойчивости:*

$$\|A\varphi\| \leq \|A\varphi_0\| \left(1 + \sqrt{Q_\mu}\right) \exp\left(-E_\mu t/\tau\right) \quad \textit{при} \quad \mu = \mu_1' > \mu_1,$$

$$\textit{где} \quad Q_{2\mu_1} = Q_{2\mu_1}(t) = 2\Upsilon_{2\mu_1} t, \quad \Upsilon_\mu = \mu\mu_1\sigma_1/(\mu - \mu_1), \quad \sigma_1 = \sigma(\psi_1),$$

$$Q_{\mu \neq 2\mu_1} = 2\Upsilon_\mu t_\mu = const, \quad t_{\mu \neq 2\mu_1} = 1/\left(2|\mu - 2\mu_1|\nu\right),$$

$$E_{\mu < 2\mu_1} = \mu/\mu_1 - 1, \quad E_{\mu \geq 2\mu_1} = 1, \quad \tau = 1/(\mu_1 \nu),$$

$$\varphi = \chi - \psi\,, \quad t \geq 0, \quad \psi = \psi^c + \psi_1, \quad \sigma\left(\psi^c\right) = \sigma\left(\tilde{A}\psi^c\right) = 0,$$

$$B\psi_1 = \mu_1 A\psi_1, \quad \psi_1 \in M', \quad A_{\mu_1}\psi_1 \in M_0.$$

Действительно, включая предельный случай $\mu \to 2\mu_1$, приведенные оценки следуют из неравенства

$$\mathrm{e}^{2\mu_1 \nu t}\, e(\varphi) - e(\varphi_0) \leq e(\varphi_0')\, \Upsilon_\mu \varsigma(t),$$

$$\varsigma(t) = \frac{\mathrm{e}^{2(2\mu_1 - \mu)\nu t} - 1}{(2\mu_1 - \mu)\nu} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2(\mu - 2\mu_1)\nu t}}{(\mu - 2\mu_1)\nu} \to 2t\,, \quad (2\mu_1 - \mu)\nu \to 0\,. \tag{2.9}$$

Действительно, при $2\mu_1 - \mu > 0$ в (9) имеем:

$$\varsigma(t) \leq \mathrm{e}^{2(2\mu_1 - \mu)\nu t} \Big/ \left((2\mu_1 - \mu)\nu\right) = 2\,\mathrm{e}^{2t/\tau}\, \mathrm{e}^{-2E_\mu t/\tau}\, t_\mu\,,$$

$$e \leq e_0\, \mathrm{e}^{-2t/\tau} + Q_\mu e_0'\, \mathrm{e}^{-2E_\mu t/\tau} \leq \left(\mathrm{e}^{-t/\tau}\sqrt{e_0} + \mathrm{e}^{-E_\mu t/\tau}\sqrt{Q_\mu e_0'}\right)^2,$$

$$E_{\mu < 2\mu_1} = \mu/\mu_1 - 1 < 1, \;\; e = e(\varphi), \;\; e_0 = e(\varphi_0), \;\; e_0' = e(\varphi_0') \leq e_0\,,$$

$$\left\|A\varphi\right\| = \sqrt{e} \leq \mathrm{e}^{-E_\mu t/\tau}\sqrt{e_0} + \mathrm{e}^{-E_\mu t/\tau}\sqrt{Q_\mu e_0} = \sqrt{e_0}\left(1 + \sqrt{Q_\mu}\right)\mathrm{e}^{-E_\mu t/\tau}.$$

При $2\mu_1 - \mu < 0$ в (9) получаем:

$$\varsigma(t) \leq 1 \Big/ \left((\mu - 2\mu_1)\nu\right) = 2t_\mu\,,$$

$$e \leq e_0\, \mathrm{e}^{-2t/\tau} + Q_\mu e_0'\, \mathrm{e}^{-2t/\tau} \leq \left(\sqrt{e_0} + \sqrt{Q_\mu e_0'}\right)^2 \mathrm{e}^{-2t/\tau}\,,$$

$$\left\|A\varphi\right\| = \sqrt{e} \leq \left(\sqrt{e_0} + \sqrt{Q_\mu}\sqrt{e_0'}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}, \qquad e_0' \leq e_0\,.$$

Неравенство (9) следует из тождества (8) при $\mu = \mu_1$ и $\mu = 0$.

Действительно, при $\mu = \mu_1$, с учетом $A_{\mu_1}\psi_1 \in M_0$, $\sigma\left(\psi^c\right) = 0$, $\sigma\left(\tilde{A}\psi^c\right) = 0$ и теоремы 3 с помощью (8) находим:

$$0.5 e_{\mu_1 t}(\varphi) + \nu d_{\mu_1}(\varphi) = \left(A\varphi, \left[\tilde{A}_{\mu_1}\psi, \varphi\right]\right) = \left(A\varphi, \left[\tilde{A}_{\mu_1}\psi^c, \varphi\right]\right) = 0,$$

$$d_{\mu_1}(\varphi)=d_{\mu_1}(\varphi')\geq(\mu-\mu_1)e(\varphi')\geq(\mu-\mu_1)e_{\mu_1}(\varphi'),$$

$$e_{\mu_1}(\varphi)=e_{\mu_1}(\varphi'),\quad 0.5e_{\mu_1 t}(\varphi')+(\mu-\mu_1)\nu e_{\mu_1}(\varphi')\leq 0,$$

$$(\mu-\mu_1)e(\varphi')\leq\mu e_{\mu_1}(\varphi')\leq\mu e(\varphi_0')\mathrm{e}^{-2(\mu-\mu_1)\nu t}.$$

При $\mu=0$ разложение $\varphi=\varphi_1+\varphi'$ для $\varphi'\in M_1,M'$ и (8) влечет

$$0.5e_t(\varphi)+\nu d(\varphi)=\left(A\varphi,\left[\tilde{A}\psi,\varphi\right]\right)=\mu_1\left(A\varphi,[\psi_1,\varphi]\right),$$

$$\left(A\varphi,[\psi_1,\varphi]\right)=\left(A\varphi,[\psi_1,\varphi']\right)=\left(\varphi',[A\varphi,\psi_1]\right)=$$

$$=\mu_1\left(\varphi',[\varphi_1,\psi_1]\right)+\left(\varphi',[A\varphi',\psi_1]\right)=\left(A\varphi',[\psi_1,\varphi']\right),$$

$$0.5e_t(\varphi)+\nu\mu_1 e(\varphi)\leq 0.5e_t(\varphi)+\nu d(\varphi)=\mu_1\left(A\varphi',[\psi_1,\varphi']\right),$$

что с учетом (4) дает неравенство

$$0.5e_t(\varphi)+\nu\mu_1 e(\varphi)\leq\mu_1\gamma(\psi_1)e(\varphi')\leq e(\varphi_0')\Upsilon_\mu\,\mathrm{e}^{2(\mu_1-\mu)\nu t}.$$

Интегрирование которого по интервалу $0<t'<t$ и приводит к (9), что завершает доказательство.

Лекция 11

4.5. Вращения на алгебре функций тока.

Обратимся к *периодической ячейке* $V=\{0\leq x\leq l,0\leq y\leq h\}$ канала в условиях (1):

Утверждение 2.6. *Алгебра* $M=so_V^\infty$ *гладких функций тока* χ *в периодической ячейке* V *канала (1), со скалярным произведением пространства* $L^2(V)=H=\bar{M}$ *и коммутатором – скобками Пуассона, удовлетворяет аксиоме (A1), является квазикомпактной и обладает следующими компонентами* $M_{0,1,2}$ *и коммутантой* M'*:*

$$M=so_V^\infty=\left\{\chi,\varphi,..\in C_V^\infty:\ (\chi,\varphi)\equiv\overline{\overline{\chi\varphi}},\ [\chi,\varphi]\equiv\chi_y\varphi_x-\chi_x\varphi_y\right\},$$

$$C_V^\infty = C^\infty\left(t \ge 0, V\right) \cap \left\{ \chi^{(i,j,k)} \Big|_{x=0}^{x=l} = 0 \right\}, \quad i,j,k = 0,1,2,...,$$

$$V = \left\{0 \le x \le l, 0 \le y \le h\right\}, \quad \chi^{(i,j,k)} = \partial^{i+j+k}\chi / \partial t^i \partial x^j \partial y^k ,$$

$$M_2 = so_{V2}^\infty = \left\{ \chi \in C_V^\infty : \chi_x \big|_{y=0,h} = 0 \right\},$$

$$M_1 = so_{V1}^\infty = \left\{ \chi \in M_2 : \chi \big|_{y=0,h} = 0 \right\},$$

$$M' = \left\{ \chi \in M_2 : \chi_x \equiv 0 \right\}, \qquad M_0 = \left\{ \chi \in M_2 : \chi_x \equiv \chi_y \equiv 0 \right\}.$$

Действительно, тождество

$$\left(\varphi, [\psi, \chi]\right) - \left(\chi, [\varphi, \psi]\right) = \overline{\overline{[\psi, \varphi\chi]}} = -\int_0^l \psi_x \varphi\chi \Big|_{y=0}^{y=h} dx = 0$$

$$\left(\varphi[\psi,\chi] - \chi[\varphi,\psi] = \varphi[\psi,\chi] + \chi[\psi,\varphi] = [\psi,\varphi\chi]\right)$$

при любых $\varphi, \chi \in M$ (любых $\varphi, \psi \in M$) равносильно $\psi_x \big|_{y=0,h} = 0$ (равносильно $\chi\big|_{y=0,h} = 0$), или $\psi \in M_2$ ($\chi \in M_1$, соответственно). Далее, $\varphi_x = \psi_x = 0$ влечет $[\varphi, \psi] = 0$, а потому M' – коммутативная подалгебра алгебры M. Наконец, $[\chi, \varphi] = \chi_y \varphi_x - \chi_x \varphi_y = 0$ при любой $\chi \in M$ означает $\varphi_x = \varphi_y = 0$ в V, или $\varphi \in M_0$. Плотность M_1 в $H = L_2(V)$, а именно полнота в $L_2(V)$ принадлежащих M_1 и отвечающих *главным вращениям* обычного волчка следующих мод Фурье ψ_{nm}, как собственных функций сужения инерции, с *главными моментами* (собственными числами) λ_{nm}:

$$\psi_{nm} = \Psi\Theta, \ \Theta = \Theta_n^{1,2} = \sin\alpha n\bar{x}, \cos\alpha n\bar{x}, \ \Psi = \Psi_m = \sin\left(m\bar{y}/2\right),$$

$$0 \le \bar{x} = x/L \le 2\pi/\alpha, \quad n+1, m = 1,2,..., \tag{2.10}$$

$$-\Delta\psi_{nm} = L^{-2}\lambda_{nm}\psi_{nm}, \quad \lambda_{nm} = \left(\alpha n\right)^2 + \left(m/2\right)^2,$$

где L, $\overline{y}$ и α определены, как в (2) и (3), соответственно, завершает доказательство.

Утверждение 2.7. *Задаче (1) отвечает волчок (6) алгебры $M = so_V^\infty$, где инерция $\tilde{A}$ и диссипация $\tilde{B}$ вместе с постоянной $\mu_0 = \pi^2/h^2$,*

$$\tilde{A}\chi = -\Delta\chi, \quad D_{\tilde{A}} = M_2, \ D_A = M_1, \quad \tilde{B}\chi = \Delta\Delta\chi,$$

$$D_{\tilde{B}} = \tilde{D} = \left\{ \chi \in D_{\tilde{A}} : \chi_y \Big|_{y=0,h} = 0 \right\},$$

$$D_B = D = so_{V0}^\infty = \left\{ \chi \in D_A : \chi_y \Big|_{y=0,h} = 0 \right\},$$

удовлетворяют аксиомам (A2)–(A7).

Действительно, справедливость (A2)–(A4) очевидна. При этом выполнение (A4) обеспечивает полнота в $L_2(V)$ главных мод (10). Равенство для постоянной μ_0 следует из оценок:

$$\lambda_{nm} = L^{-2}\left((\alpha n)^2 + (m/2)^2 \right) \geq \lambda_{01} = (1/2L)^2 = \pi^2/h^2,$$

$$\mu_0 = \lambda_{01} = (A\psi_{01}, \psi_{01})\|\psi_{01}\|^{-2} \leq (A\psi, \psi)\|\psi\|^{-2}, \ \psi \in D_A, \ \|\psi\| > 0.$$

Выполнение (A5) гарантируют соотношения:

$$\begin{gathered}
(A\varphi, [\psi, \varphi]) \leq \|A\varphi\| \|[\psi, \varphi]\|, \\
\|\varphi\|^2 \leq \mu_0^{-1}(\varphi, A\varphi) \leq \mu_0^{-1}\|\varphi\|\|A\varphi\|, \\
\left(\varphi_y\psi_x - \varphi_x\psi_y\right)^2 = \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right)\left(\psi_x^2 + \psi_y^2\right) - \left(\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y\right)^2, \\
\|[\psi, \varphi]\| \leq \sqrt{\theta(\psi)}\sqrt{(\varphi, A\varphi)}, \quad \theta(\psi) = \max_V\left(\psi_x^2 + \psi_y^2\right), \\
(A\varphi, [\psi, \varphi]) \leq \sigma(\psi)\|A\varphi\|^2, \quad \sigma(\psi) = \sqrt{\theta(\psi)/\mu_0}, \\
\mu_0 = \pi^2/h^2.
\end{gathered} \tag{2.11}$$

Симметричность A в (A6) и точность B в (A7),

$$\xi\Delta\eta-\eta\Delta\xi=P_x^x+P_y^y\,,\ \varphi\Delta\left(\Delta\zeta\right)-\left(\Delta\varphi\right)\Delta\zeta=Q_x^x+Q_y^y\,,\ \xi,\eta\in D_A\,,$$

$$P^{x,y}=\xi\eta_{x,y}-\eta\xi_{x,y}\,,\ \ Q^{x,y}=\varphi\left(\Delta\zeta\right)_{x,y}-\left(\Delta\zeta\right)\varphi_{x,y}\,,\ \ \varphi,\zeta\in D\,,$$

$$X,Y=P^{x,y}\ \ \textit{или}\ \ X,Y=Q^{x,y}\,,\ \ X\Big|_{x=0}^{x=l}=0\,,\ \ 0\le y\le h\,,$$

$$Y\Big|_{y=0,h}=0\ \ \left(\xi,\eta,\varphi,\varphi_x,\varphi_y\Big|_{y=0,h}=0\right),\ 0\le x\le l\,,\ \ \xi,\eta\in D_A\,,$$

$$\overline{\overline{X_x+Y_y}}=\int_0^h\left(X\Big|_{x=0}^{x=l}\right)dy-\int_0^l\left(Y\Big|_{y=0}^{y=h}\right)dx=0\,,$$

заканчивают доказательство.

Утверждение 2.8. *С продольными модами* Θ *и коэффициентами* αn *главных вращений (10), волчок (6) задачи (1) обладает удовлетворяющей (А8) системой совместных мод* $\varphi=\varphi_{nk}$, *с размерными и безразмерными совместными моментами* $\mu_{nk}=L^{-2}\gamma$ *и* $\gamma=\gamma_{nk}$, *соответственно, и поперечными модами* $\Phi=\Phi\left(\overline{y}\right)$ *вида:*

$$\zeta=\mathrm{e}_i=\varphi_{nk}=\varphi=\Theta\left(\overline{x}\right)\Phi\left(\overline{y}\right),\quad \Theta\left(\overline{x}\right)=\Theta_n^{1,2},\quad \Phi\left(\overline{y}\right)=\Phi_{nk}\,,$$

$$0\le\overline{x}=x/L\le 2\pi/\alpha\,,\quad 0\le\overline{y}=y/L\le 2\pi\,,\quad L=h/2\pi\,,\quad \alpha=h/l\,,$$

$$\begin{gathered}
\Phi_{0,2k-1}=1-\left(-1\right)^k\cos\pi bz\,,\quad b=b_{0,2k-1}=\beta_{2k-1}^0\,,\\
-\pi<\pi z=\overline{y}-\pi<\pi\,,\\
\Phi_{0,2k}=\sin b\pi z-\varsigma\pi z\,,\qquad b=b_{0,2k}=\beta_{2k}^0\,,\\
\varsigma=\pi^{-1}\sin\pi b\,,\\
\Phi_{n,2k-1}=\cos b\pi z-\vartheta\,\mathrm{ch}\,\pi\alpha nz\,,\ b=b_{n>0,2k-1}=\beta_{2k-1}^n\,,\\
\vartheta=\left(\mathrm{ch}^{-1}\pi\beta\right)\cos\pi b\,,\\
\Phi_{n,2k}=\sin b\pi z-\sigma\,\mathrm{sh}\,\alpha n\pi z\,,\qquad b=b_{n>0,2k}=\beta_{2k}^n\,,\\
\sigma=\left(\mathrm{sh}^{-1}\pi\alpha n\right)\sin\pi b\,,
\end{gathered}\tag{2.12}$$

$$k-\frac{1}{2}<b_{n>0,2k-1}=k-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{b_{n,2k-1}}{\alpha n\operatorname{th}\pi\alpha n}<b_{0,2k-1}=k<$$

$$<b_{n,2k}=k+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{b_{n>0,2k}\operatorname{th}\pi\alpha n}{\alpha n}<$$

$$<b_{0,2k}=k+\frac{\operatorname{arctg}\pi b_{0,2k}}{\pi}<k+\frac{1}{2},$$

$$\mu_i=\mu_{nm}=L^{-2}\lambda_{nm},\quad \lambda_{nm}=(\alpha n)^2+b^2,\ b=b_{nm}=\beta_m^n$$

$$n+1,m=1,2,..\ .$$

Действительно, как и для случая главных вращений (10), полнота системы продольных мод Фурье $\Theta(\overline{x})=\Theta_n^{1,2}(\overline{x})$, $n=0,1,2,..$, на отрезке $0\le\overline{x}\le 2\pi/\alpha$, и разделение переменных $\zeta=\varphi=\Theta(\overline{x})\Phi(\overline{y})$ сводят спектральную задачу для совместных вращений (5) к серии интегральных тождеств для поперечных мод $\Phi(\overline{y})$:

$$\Delta(\Delta\varphi+\mu\varphi)=0,\quad 0<y<h,\quad \varphi,\varphi_y\Big|_{y=0,h}=0,\ \varphi=\Theta(\overline{x})\Phi(\overline{y}),$$

$$D_b^+D_c^-\Phi=0,\ 0<\overline{y}<2\pi,\ \Phi,\Phi'\Big|_{\overline{y}=0,2\pi}=0,\ D_b^{\pm}\Phi\equiv\Phi''\pm b^2\Phi,$$

$$c=\alpha n,$$

$$(\Phi,\Psi)_{cB}=b^2(\Phi,\Psi)_{cA}\quad \textit{при всех}\quad \Psi\in\dot{C}_1^{\infty},$$

$$\dot{C}_p^{\infty}=\left\{\Psi\in C^{\infty}(0\le\overline{y}\le 2\pi):\ \Psi^{(i)}\Big|_{\overline{y}=0,2\pi}=0,\ i=0,1,..,p\right\},$$

$$(\Phi,\Psi)_{cA}\equiv\overline{\Phi'\Psi'+c^2\Phi\Psi},\qquad (\Phi,\Psi)_{cB}\equiv\overline{\Phi''\Psi''+c^2\Phi'\Psi'},$$

$$\overline{\Psi D_b^+D_c^-\Phi}=(\Psi,\Phi)_{cB}-b^2(\Psi,\Phi)_{cA},\qquad \overline{\Psi}\equiv\int_0^{2\pi}\Psi d\overline{y},$$

$$|\Psi|_{cA}=\sqrt{(\Psi,\Psi)_{cA}},\quad |\Psi|_{cB}=\sqrt{(\Psi,\Psi)_{cB}}.$$

Вытекающая из оценок

$$\left|\Psi(\bar{y}')-\Psi(\bar{y})\right|\le\left|\int\limits_{\bar{y}}^{\bar{y}'}\left|\Psi'(\tilde{y})\right|d\tilde{y}\right|\le\left|\Psi\right|_{cA}\sqrt{\left|\bar{y}'-\bar{y}\right|},$$

$$\left|\Psi'(\bar{y}')-\Psi'(\bar{y})\right|\le\left|\Psi\right|_{cB}\sqrt{\left|\bar{y}'-\bar{y}\right|},\quad 0\le\bar{y},\bar{y}'\le 2\pi,$$

$$\left|\Psi\right|_{cA}\le\left|\Psi\right|_{cC}\sqrt{2\pi}\le 2\pi\left(\sqrt{\overline{\Psi''^2}}+c\sqrt{\overline{\Psi'^2}}\right)\le 2\pi\left|\Psi\right|_{cB},$$

$$\left|\Psi\right|_{cC}\equiv\max_{0\le\bar{y}\le 2\pi}\left(\left|\Psi'\right|+c\left|\Psi\right|\right),\qquad \Psi\in\dot{C}_1^{\infty},$$

равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность функций $\Psi\in\dot{C}_1^{\infty}$ и их производных $\Psi'\in\dot{C}_0^{\infty}$, ограниченных нормой $\left|\Psi\right|_{cB}\le B_0=const<\infty$, обеспечивают компактность вложения норм $\left|\Psi\right|_{cC}\le\left|\Psi\right|_{cB}\sqrt{2\pi}$ [60, Глава 1, § 3], следовательно, и норм $\left|\Psi\right|_{\beta A}\le 2\pi\left|\Psi\right|_{\beta B}$. Классическая схема рассуждений [48, § 16], примененная к тождествам для мод $\Phi=\Phi_{nk}(\bar{y})$, $k=1,2,..$, (приведенная в [33, § 10, лемма 4] для общего случая компактного вложения норм скалярных произведений, обеспечивающего полноту системы надлежащих собственных мод) приводит к их полноте при любом $n=0,1,2,..$, что завершает доказательство.

Утверждение 2.9. *При* $\alpha>\alpha_1$ *совместный момент* $\mu_1=\mu_{01}=L^{-2}$ *(или* $\lambda_{01}=b_{01}=\beta_1^0=1$*) из (12) является наименьшим и однократным собственным числом задачи (5), ядро которого примитивно в смысле аксиомы (А9). При этом следующим по величине за ним совместным моментом данной задачи служит* $\mu_1'=L^{-2}\lambda_1'>\mu_1$, *где служит* $\lambda_1'=\min\{\lambda_{11},\lambda_{02}\}$ *при* $\alpha>\alpha_1$ *или* $\lambda_1'=\min\{\lambda_{21},\lambda_{02},\lambda_{12}\}=\lambda_{21}=\lambda_{11}(2\alpha_1)$ *при* $\alpha=\alpha_1$.

Действительно, ядро безразмерного момента $\lambda_{01}=1$ из (12) однократно и образовано пропорциями функций $\varphi_{01}\left(\overline{y}\right)$ из (2), таких, что $\varphi_{01}\in M'$ ($\varphi_{01x}=0$) и $\Delta\varphi_{01}+\mu_{01}\varphi_{01}=\mu_{01}\in M_0$, т.е. выполнена аксиома (А9). Для проверки минимальности λ_{01} заметим, что в (12) $b_{nk}<b_{n,k+1}$, $0<b_{nk}-b_{n,k+1}<1/2$ и $b_{nk}+b_{n,k+1}<k+1$, а значит $\lambda_{nk}<\lambda_{n,k+1}$ и

$$\lambda_{n+1,1}-\lambda_{n1}=\alpha^2\left(2n+1\right)-\left(b_{n1}-b_{n+1,1}\right)\left(b_{n1}+b_{n+1,1}\right)>3\alpha^2-1>0$$

при $n=0,1,2,..$, $k=1,2,..$, $\alpha\ge\alpha_1>1/\sqrt{3}$ (последним учитывается лемма 1). Следовательно, первый и второй по величине моменты λ_1 и λ_1' находятся среди чисел λ_{n1}, $n=0,1,2,..$, $\lambda_{02}>\lambda_{01}$ и $\lambda_{12}>\lambda_{11}$ (поскольку $\lambda_{n1}<\lambda_{n,k+1}<\lambda_{n,k+2}$, $n+1,k=1,2,..$). В силу оценки $\lambda_{n1}<\lambda_{n+1,1}$, $n=0,1,2,..$, множество для их поиска сокращается до 5 чисел: $\lambda_{01}\le\lambda_{11}<\lambda_{21}$, $\lambda_{02}>1$ и $\lambda_{12}>\lambda_{11}$. В силу леммы 1 $\lambda_{11}=\lambda_{11}\left(\alpha\right)\ge\lambda_{01}=1$ при $\alpha\ge\alpha_1$. Следовательно, первый момент $\lambda_1=\lambda_{01}$. Далее, из (12) следует, что $b_{21}\left(\alpha\right)=b_{11}\left(2\alpha\right)$ и $\lambda_{21}\left(\alpha\right)=\lambda_{11}\left(2\alpha\right)>\lambda_{11}\left(\alpha\right)$, $\alpha>0$ (учитывается лемма 1). При $\alpha>\alpha_1$, следовательно, наименьшим из четырех оставшихся моментов $\lambda_{12}>\lambda_{11}$, $\lambda_{02}>1$, $\lambda_{21}>\lambda_{11}$ и $\lambda_{11}>1$ служит $\lambda_1'=\min\left\{\lambda_{11},\lambda_{02}\right\}$. При $\alpha=\alpha_1$ в силу леммы 1 имеем: $\lambda_{11}=\lambda_1=1$, и для выбора второго момента $\lambda_1'>1$ остается три числа $\lambda_{12}=\lambda_{11}\left(2\alpha_1\right)$, λ_{02} и λ_{21}, из которых наименьшим, согласно лемме 1, служит первое, что заканчивает доказательство.

Утверждение 2.10. *Без перемешивания* $g=0$ *в идеальной или вязкой среде (*$\nu\ge0$*), при любом главном факторе (*$\alpha>0$*), течение*

Куэтта–Пуазейля, с $\psi = \psi^c + \psi^p$ *(с* $\psi^k = 0$*) из (2), отвечает нормальному вращению волчка (6) задачи (1) в смысле теоремы 5, а именно тождества* $\psi_x = \psi_{yyyy} = 0$ *обеспечивают вырождение генерации* $\left(\Delta\varphi, \left[\Delta\psi, \varphi\right]\right) = 0$ *на любом возмущении* φ *из* M_2 *в утверждении 2.6.*

Действительно, имеем:

$$\left[\Delta\psi, \varphi\right] = \psi_{yyy}\varphi_x, \ \left(\Delta\varphi, \left[\Delta\psi, \varphi\right]\right) = \overline{\overline{\psi_{yyy}\varphi_x\Delta\varphi}}, \ -\varphi_x\Delta\varphi = Y_x - X_y,$$

$$Y = \left(\varphi_y{}^2 - \varphi_x{}^2\right)\Big/2, \quad X = \varphi_x\varphi_y,$$

$$-\psi_{yyy}\varphi_x\Delta\varphi = \left(\psi_{yyy}Y\right)_x - \left(\psi_{yyy}X\right)_y + \psi_{yyyy}X,$$

$$X\big|_{y=0,h} = 0 \quad \left(\varphi_x\big|_{y=0,h} = 0\right), \ 0 \le x \le l, \quad Y\big|_{x=0}^{x=l} = 0, \ 0 \le y \le h,$$

$$\overline{\overline{\left(\psi_{yyy}Y\right)_x - \left(\psi_{yyy}X\right)_y}} = \int_0^h \left(Y\big|_{x=0}^{x=l}\right)\psi_{yyy}dy - \int_0^l \left(\psi_{yyy}X\big|_{y=0}^{y=h}\right)dx = 0,$$

$$-\left(\Delta\varphi, \left[\Delta\psi, \varphi\right]\right) = -\overline{\overline{\psi_{yyy}\varphi_x\Delta\varphi}} = \overline{\overline{\psi_{yyyy}X}},$$

и тождество $\psi_{yyyy} = 0$ завершает доказательство.

Утверждение 2.11. *Без перепада давления* $p_x = 0$ *в вязкой среде (*$\nu > 0$*), при ограниченном главным факторе, или при* $\alpha \ge \alpha_1$*, течение Куэтта–Колмогорова, с* $\psi = \psi^c + \psi^k$ *(с* $\psi^p = 0$*) из (2), отвечает центральному вращению волчка (6) задачи (1) в смысле теоремы 6, а именно тождества* $\psi_x^c = \psi_{yy}^c = 0$ *влекут вырождение генераций* $\left(\Delta\varphi, \left[\Delta\psi^c, \varphi\right]\right) = \left(\Delta\varphi, \left[\psi^c, \varphi\right]\right) = 0$ *на любом возмущении* φ *из* M_2 *в утверждении 2.6, а условия* $\psi_x^k = 0$ *(*$\psi^k \in M'$*) и*

$\Delta\psi^k + \mu_{01}\psi^k = const \in M_0$ *влекут включение* ψ^k *в примитивное ядро наименьшего совместного момента* $\mu_1 = \mu_{01}$ *из аксиомы (A9).*

Действительно, как нетрудно заметить, вырождения генераций следуют из утверждения 2.10 при $\psi^p = 0$ и замене $\Delta\psi = \psi_{yy}$ на ψ^c, соответственно, а принадлежность ψ^k ядру (A9) – из формул (2), что заканчивает доказательство.

Лекция 12

4.6. Устойчивость основных течений.

Переходим к завершению доказательства теоремы 2.1: выводу ее утверждения непосредственно из леммы 2.1 и утверждений 2.1–2.11.

Утверждения 2.6–2.9 обеспечивают выполнение аксиом (A1)–(A9) для волчка (6) задачи (1). Утверждения 2.10–2.11 влекут справедливость для сумм вращений Куэтта–Пуазейля $\psi^c + \psi^p$ и Куэтта–Колмогорова $\psi^c + \psi^k$ условий утверждений 2.4 и 2.5, соответственно, использующих утверждения 2.1–2.3. Оценки утверждений 2.4 и 2.5 при этом влекут оценки (3) теоремы 1, в частности, $\mu_1 \geq \mu_0 = \pi^2/h^2$ при $0 < \alpha < \alpha_1$ (утверждений 2.2 и 2.7); $\mu_1 = \mu_{01} = L^{-2} = 4\mu_0$, $\mu = \mu_1' = L^{-2}\lambda_1' > \mu_1 = L^{-2}\lambda_1 = L^{-2}$ при $\alpha \geq \alpha_1$ и $\lambda_1' = \lambda_{11}(2\alpha_1)$ при $\alpha = \alpha_1$ (утверждение 2.9); $\lambda_1' = \lambda_{11}(\alpha)$ при $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, $\lambda_1' = \lambda_{11}(\alpha_2) = 2$ при $\alpha = \alpha_2$, $\lambda_1' = \lambda_{11}(\alpha) > 2$ при $\alpha_2 < \alpha < \alpha_3$ и $\lambda_1' = \lambda_{11}(\alpha_3) = \lambda_{02}$ при $\alpha \geq \alpha_3$ (утверждение 2.9 и лемма 2.1). В результате, в оценках утверждения 2.4

$$\|\omega\| = \|A\varphi\| = \|\omega_0\| \text{ при } \nu = 0,$$

$$\|\omega\| = \|A\varphi\| \leq \|\omega_0\| \exp\left(-\mu_0 t/(\mu_1\tau)\right) = \|\omega_0\| \exp\left(-t/(4\tau)\right)$$

при $\nu > 0$ и $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$

или $\|\omega\| = \|A\varphi\| \le \|\omega_0\| \exp(-t/\tau)$ *при* $\nu > 0$ и $\alpha \ge \alpha_2$,

что и приводит к оценкам (3) в случае $g = 0$ и $\nu \ge 0$. В оценках утверждения 2.5 при этом, с учетом (2) и (11),

$$\psi_1 = \psi^k = I_k L \varphi_{01}(\bar{y}),$$

$$\varphi_{01y}(\bar{y}) = L^{-1} \sin \bar{y},$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\theta(\psi_1)} \Big/ \sqrt{\mu_0} = I_k \Big/ \sqrt{\mu_0} = ghL^2 / \pi\nu ,$$

$$\Upsilon_\mu = \mu\mu_1\gamma_1 \big/ (\mu - \mu_1) = L^{-2}\lambda_1'\gamma_1 \big/ (\lambda_1' - 1) = gh\lambda_1' \big/ \left(\pi\nu(\lambda_1' - 1)\right)$$

при $\alpha \ge \alpha_1$ $(\lambda_1' > 1)$,

$$t_\nu = 1 \big/ \left(2\nu|\mu_1' - 2\mu_1|\right) = L^2 \big/ \left(2\nu|\lambda_1' - 2|\right)$$

при $\alpha \ne \alpha_2$ $(\lambda_1' \ne 2)$;

$$\Upsilon_{2\mu_1} = gh2 \big/ \left(\pi\nu(2-1)\right) = 2gh / (\pi\nu),$$

$$Q_{2\mu_1}(t) = q_{\alpha_2}(t);$$

$$Q_{\mu \ne 2\mu_1} = 2\Upsilon_\mu t_\mu = ghL^2\lambda_1' \big/ \left(\pi\nu^2(\lambda_1' - 1)|\lambda_1' - 2|\right)$$

и $L^2 = h^2 / 4\pi^2$

при $\alpha \ne \alpha_2$; $E_{\mu < 2\mu_1} = \lambda_1' - 1$ *при* $\alpha < \alpha_2$

и $E_{\mu \ge 2\mu_1} = 1$ *при* $\alpha \ge \alpha_2$,

что завершает доказательство теоремы 2.1.

Литература

1. Euler, L. Principes generaux du mouvement des fluids / L. Euler // Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles letters de Berlin. – 1757. – T. 11. – P. 274–315. Русск. пер.: Леонард Эйлер**.** Общие законы движения жидкостей // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1999. – № 6. – С. 26–54.

2. Navier, C. L. M. H. Mémoire sur le lois du mouvement des fluids / C. L. M. H. Navier // Mém. Acad. Roy. Sci. Paris. – 1823. – T. 6. – P. 389–416.

3. Stokes, G. G. On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion / G. G. Stokes // Transaction of the Cambridge Philosophical Society. – 1845. – V. 8. – No. 22. – P. 287–342.

4. Thomson., W. On the propagation of laminar motion through a turbulently moving inviscid liquid / W. Thomson // Phil. Mag. – 1887. – Ser. 5. – V. 24. – Iss. 149. – P. 342–353.

5. Reynolds, O. On the Dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion / O. Reynolds // Phil. Trans. Roy. Soc. London – 1894. – Ser. A. – V. 186. – P. 123–164.

6. Hagen, G.H.L. Über den Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren / G.H.L. Hagen // Poggendorfs Ann. Physik Chemie. – 1839. – T. 46. – P. 423–442.

7. Poiseuille, J.L.M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres. I. Influence de la pression sur la quantité de Iiquide qui traverse les tubes de très-petits diameters / J.L.M. Poiseuille // C.R.A.S. – 1840. – V. 11. – P. 961–967.

8. Reynolds, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels / O. Reynolds // Phil. Trans. R. Soc. Lond. – 1883. – V. 174. – P. 935–982.

9. Линь, Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости / Цзя-цзяо Линь – М.: ИЛ, 1974. 194 с.

10. Монин, А.С. Гидродинамическая неустойчивость / А.С. Монин // УФН. – 1986. – Т. 150. – вып. 1. – С. 61 –105.

11. Арнольд, В.И. / Семинар А.Н. Колмогорова по избранным вопросам анализа (1958-1959) / В.И. Арнольд, А.Д. Мешалкин // УМН. – 1960. – Т 15. – № 1. – С. 247–250.

12. Мешалкин, Л.Д. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости / Л.Д. Мешалкин, Я.Г. Синай // ПММ. – 1961. – Т. 25. – вып.6. – С. 1140–1143.

13. Юдович, В.И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости / В.И. Юдович // ПММ. – 1965. – Т. 29. – № 3. – С. 453–467.

14. Гледзер, Е.Б. Системы гидродинамического типа и их применение / Е.Б. Гледзер, Ф.В. Должанский, А.М. Обухов / – М.: Наука, 1981. – 368 с.

15. Трошкин, О.В. Алгебраическая структура двумерных стационарных уравнений Навье-Стокса и нелокальные теоремы единственности / О.В. Трошкин // ДАН СССР. – 1988. – Т. 298. - № 6. – С. 1372-1376.

16. Опарина, Е.И. Устойчивость течения Колмогорова в канале с твердыми стенками / Е.И. Опарина, О.В. Трошкин // Доклады Академии наук. – 2004. – Т. 398. – № 4. – С. 487–491.

17. Крылов, А.Л. Об устойчивости течения Пуазейля в плоском канале / А.Л. Крылов // ДАН СССР. 1964. – Т. 159. – № 5. – С. 978–981.

18. Вишик, М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // УМН. 1957. – Т. 12. – Вып. 5 (77). – С. 3–122.

19. Вайнберг, М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин // М.: Наука, 1969. – 528 с.

20. Ниренберг, Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг. – М. : Мир, 1977. – 232 с.

21. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. Под ред. Дж. Б. Келлера и С. Антмана. – М.: Мир, 1974.– 254 с.

22. Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. – М.: Мир, 1980. – 368 с.

23. Красносельский, М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М.А. Красносельский – М.: ГИТТЛ, 1956. – 392 с.

24. Арнольд, В.И. Об условиях устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости / В.И. Арнольд // ДАН СССР. 1965. – Т. 162. – № 5. – С. 975–978.

25. Arnold, V.I. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l’hydrodynamique de fluids parfaits / V.I. Arnold // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1966. – V. 16. – P. 319–361.

26. Moreau, J.J. / Une methode de “cinematigue fonctionnelle” en hydrodynamigue / J.J. Moreau // C.R.A.S. – 1959. – V. 249. – No 21. – P. 2156–2158.

27. Громека, И.С. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости / И.С. Громека. – Казань, 1981. – Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 116 с.

28. Ламб, Г. Гидродинамика / Г. Ламб. – М.: Гостехиздат, 1947. 827 с.

29. Шнирельман, А.И. О геометрии группы диффеоморфизмов и динамике идеальной несжимаемой жидкости А.И. Шнирельман // Мат. сб. – 1985. – Т. 128. – вып. 1. – С. 82-109.

30. Арнольд, В.И. Топологические методы в гидродинамике / В.И. Арнольд, Б.А. Хесин // – М.: МЦНМО, 2007. – 392 с.

31. Трошкин, О.В. О топологическом анализе структуры гидродинамических течений / О.В. Трошкин // УМН. – 1988. – Т. 43. – вып. 4 (262). – С. 129-158.

32. Трошкин, О.В. Двумерная задача о протекании для стационарных уравнений Эйлера / О.В. Трошкин // Мат. сб. – 1989. – Т. 180. – Вып. 3. – С. 354–374.

33. Troshkin, O.V. Nontraditional Methods in Mathematical Hydrodynamics. Translation of Mathematical Monographs / O.V. Troshkin // US. – Rhode Island. – Providence: American Mathematical Society. – 1995. – Vol. 144. – 197 p.

34. Романов В.А. Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта / В.А. Романов // Функ. анализ и его приложения. 1973. – Т. 7. – Вып. 2. – С. 62–73.

35. Иванилов Ю.П., Яковлев Г.Н. О бифуркации течения жидкости между вращающимися цилиндрами / Ю.П. Иванилов, Г.Н. Яковлев // ПММ. 1966. Т. 30. С. 910–916.

36. Velte, W. Stabilitat und Verzweigung stationarer Losungen der Navier-Stokesschen Gleihungen bein Taylorproblem / W. Velte // Arch. Rat. Mech. Anal. 1966. – V. 22. – P. 1–14.

37. Джозеф, Д. Устойчивость движений жидкости / Д. Джозеф – М.: Мир, 1981. 638 с.

38. Трошкин, О.В. Диссипативный волчок на слабокомпактной алгебре Ли и устойчивость основных течений в плоском канале /О.В. Трошкин // Доклады Академии наук. – 2012.– Т. 442.– № 2.– С. 184–189.

39. Трошкин, О.В. К нелинейной устойчивости течений Куэтта, Пуазейля и Колмогорова в плоском канале /О.В. Трошкин // Доклады Академии наук. – 2012. – Т. 443. – № 1. – С. 29–33.

40. Трошкин, О.В. К нелинейной устойчивости параболического профиля в плоском периодическом канале /О.В. Трошкин // ЖВМ и МФ. – 2013. – Т. 53. - № 11. – С. 142–161.

41. Белоцерковский, О.М. Об установлении спутного вихря в потоке идеальной среды /О.М. Белоцерковский, М.С. Белоцерковская, В.В. Денисенко, И.В. Ериклинцев, С.А.Козлов, Е.И. Опарина, О.В. Трошкин, С.В. Фортова// ЖВМ и МФ. – 2013. – Т. 54. - № 1. – С. 37–45.

42. Белоцерковский, О.М. Численное исследование устойчивости течения Тейлора между двумя цилиндрами в двумерном случае / О.М. Белоцерковский, В.В. Денисенко, А.В. Конюхов, А.М. Опарин, О.В. Трошкин, В.М. Чечеткин // ЖВМ и МФ. 2009. – Т. 49. – № 4. – С. 754–768.

43. Белоцерковский, О.М. О структурировании хаоса /О.М. Белоцерковский, А.В. Конюхов, А.М. Опарин, О.В. Трошкин, С.В. Фортова // ЖВМ и МФ. 2011. – Т. 51. – № 2. – С. 237–250.

44. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская – М.: Наука, 1970. – Изд. 2–е. – 288 с.

45. Юдович, В.И Двумерная нестационарная задача протекания идеальной жидкости через заданную область / В.И. Юдович // Мат. сб. – 1964. – Т. 64 – С. 562-588.

46. Wolibner, W. On theoreme sur l’existence du movement plan d’un fluid parfait, homogene, incompressible, pendant um temps infiniment longue / W. Wolibner // Math. Z. – 1933. – Vol. 37. – P. 698–726.

47. Kato, T. On classical solutions of the two dimensional nonstationary Fuler equation / T. Kato // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. – V. 25. – No 3. – P. 188–200.

48. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев – Л.: Ленинградский государственный Ордена Ленина университет им. А.А. Жданова, 1950. – 255 с.

49. Дезин, А.А. Инвариантные формы и некоторые структурные свойства гидродинамических уравнений Эйлер / А.А. Дезин // Zeit. fur Anal. Und ihre Anwendungen. –1983. – B. 2 (5). – S. 401–409.

50. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. – М. : Мир, 1981. – Изд. 2-е. – 408 с.

51. Милн–Томсон, Л.Н. Теоретическая гидродинамика / Л.Н. Милн–Томсон – М.: Мир, 1964. – 521 с.

52. Лойцянский Л.Г. Механика жидкостей и газов / Л.Г. Лойцянский – М.: Наука, 1987. – 840 с.

53. Hoffman, J. Computational turbulent incompressible flow / J. Hoffman, C. Johnson – Springer, 2007. – 387 p.

54. Понтрягин, Л.С. Непрерывные группы / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1984. – 527 с.

55. Бурбаки, Н. Группы и алгебры Ли. Компактные вещественные группы Ли / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1986. 174 с.

56. Дубровин Б.А. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия /– М.: Наука, 1979. – 759 с.

57. Арнольд, В.И Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд – М.: Наука, 1978. – 304 с.

58. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд – М. : Наука, 1989. – Изд. 3-е. – 472 с.

59. Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 2 / Н.Н. Бухгольц – М.: Наука, 1966. – 332 с.

60. Канторович, Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.