

Федеральная целевая программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» 2009-2013 гг., направление "Математика", мероприятие 1.2.1. Государственный контракт № П939. НГР: 1037739362550.

Научно-образовательный курс

«Приложения бесконечномерных алгебр Ли к теории гидродинамической устойчивости»

О.В. Трошкин

С о д е р ж а н и е к у р с а

	Л е к ц и я 1
Вводные замечания	
Часть 1. Элементы математической гидродинамики	
§1. Геометрические элементы	
1.1. Диорты, прямые произведения, дивекторы и свертки.....	9
1.2. Элементы объема и площади.....	13
1.3. Близкодействия и дальнодействия.....	15
1.4. Динамические напряжения и напряжения деформаций	16
1.5. Мощность напряжений и скорость диссипация.....	18
1.6. Неоднородность и анизотропия деформаций.....	20
	Л е к ц и я 2
§2. Кинематические элементы	
2.1. Конвективное ускорение частиц.....	22
2.2. Производная элемента объема.....	23
2.3. Скорость деформации элемента площади.....	24
2.4. Производные конечных объемов и площадей	27
	Л е к ц и я 3
§3. Динамические элементы (8 заповедей гидродинамики)	
3.1. Сохранение массы (от Даниила Бернулли)	29
3.2. Выталкивающая сила (от Архимеда и Эйлера)	29
3.3. Сохранение энергии (от Майера, Джоуля и Гельмгольца).....	30
3.4. Тепловые потери (от Фурье)	31
3.5. Динамическая вязкость (от Ньютона и Навье)	31
3.6. Давление молекул (от Паскаля и Торричелли)	31
3.7. Поправка на сжимаемость (от Сен-Венана и Стокса)	32
3.8. Нормальные среды (от Менделеева и Клапейрона)	32
	Л е к ц и я 4
Часть 2. Классические законы сохранения	
§4. Основные интегральные соотношения	
4.1. Уравнение неразрывности	33
4.2. Уравнения импульсов	34

4.3. Уравнение энергии	35
4.4. Формула напряжений	35
4.5. Объемные силы и граничные потоки	38
Л е к ц и я 5	
§5. Дифференциальные уравнения среды	
5.1. Законы сохранения для жидкой частицы	40
5.2. Уравнения движения и теплопроводности	40
5.3. Энтропия идеального газа	43
5.4. Энтропия несжимаемой жидкости	44
Л е к ц и я 6	
§6. Классические формы уравнений несжимаемой среды	
6.1. Уравнения Навье	46
6.2. Основные течения	47
6.3. Форма Громеки–Лэмба	48
6.4. Форма Гельмгольца–Фридмана	48
6.5. Односвязные области течения	49
Л е к ц и я 7	
Ч а с т ь 3. Течения в периодическом слое	
§7. Источники и потенциалы слоя	
7.1. Зональные переменные и операции	53
7.2. Первый признак среднего	54
7.3. Признак нуля	55
7.4. Второй признак среднего	56
7.5. Второй признак нуля	57
7.4. Оператор обратного источника	57
Л е к ц и я 8	
§8. Абс–теорема о разложении	
8.1. Векторный периодический слой	61
8.2. Структурные потенциалы и поля	62
8.3. Лемма о составляющих источника	63
8.4. Абс–разложение	64
Л е к ц и я 9	
§9. Приложения абс–теоремы	
9.1. Зональный критерий градиента	66
9.2. Т–форма уравнений Навье	68
Л е к ц и я 10	
Ч а с т ь 4. Течения в периодическом канале	
§10. Квазикомпактные алгебры	
10.1. Оснащенные алгебры	71
10.2. Признак компактности	72
10.3. Структура оснащенной алгебры	72
10.4. Определение квазикомпактной алгебры	74
Л е к ц и я 11	
§11. Диссипативный волчок на квазикомпактной алгебре	
11.1. Аксиомы диссипативного волчка	75
11.2. Инвариантность ядер главных моментов	78
11.3. Спектральная лемма	79
11.4. Уравнение волчка	82
11.5. Существование главных вращений	84
11.6. Устойчивость основного вращения	85
11.7. Единственность основного вращения	90
11.8. Лемма о мажоранте	91

Лекция 12

§12. Течения на торе и в кольце	
12.1. Алгебра функций тока	93
12.2. Волчок задачи Колмогорова	95
12.3. Параметры и основное течение	95
12.4. Составляющие главных мод	97
12.5. Полнота системы главных мод	100
12.6. Сравнение главных моментов	101
12.7. Устойчивость основного течения	103

Лекция 1

Вводные замечания

Как хорошо известно, основным объектом механики жидкости и газа (или, как она называется здесь по–старинному, гидродинамики) служит объем сплошной среды, переносимый и деформируемый течением при сохранении его массы, импульса и энергии, так называемый подвижный или жидкий объем.

Наблюдаемые масштабы движений и деформаций объемов простираются от нанометров (10^{-9} м, в жидком гелии) до гигаметров (10^9 м, в компактных объектах вселенной).

В подобных пограничных, или экстремальных режимах часто и сами законы движения нуждаются в необходимых уточнениях. Но при этом остается практически нетронутым их основное ядро – исходные положения, относящиеся к обычным воде и воздуху, которые осмысливаются вот уже на протяжении 23 веков с момента получения первого точного положения гидродинамики – закона о величине потери веса погруженного в жидкость тела.

Наличие измеряемой данным законом выталкивающей силы у сплошной среды, определяет гидродинамику как один из разделов физики (науки о силах). Рассмотрению основных геометрических,

кинематических и динамических элементов этого раздела и посвящена первая часть лекций. Отметим три ее особенности.

Первая особенность. Если вектор – объект классической механики материальной точки, то для гидродинамики необходима уже пара векторов: сила и нормаль к малой площади в точке приложения силы. Так возникает удобный в обращении двойной вектор, или дивектор, на составляющие которого распространяются все необходимые операции векторного исчисления.

Вторая особенность. Нормаль определяется знакомым из анализа вектором площади. Этим вектором и измеряется деформация объема, ограниченного поверхностью, с ее элементом – вектором внешней нормали, длина которого равна элементу площади.

Переносимые траекториями точки объема, первоначально заполнявшего, скажем, координатный куб, за малое время смещают его и одновременно деформируют в тело, приближаемое параллелепипедом. Возникающая при этом локальная система отсчета из подвижных (лагранжевых) координат порождает новую геометрию, определяемую их метрикой (метрическими коэффициентами).

Подвижная геометрия согласована с неподвижной тем, что векторы, измеряемые в подвижной системе своими проекциями на координатные оси, как и следовало ожидать, не меняются, т.е. совпадают с их измерениям в неподвижной системе.

Чтобы измерить требуемое изменение вектора площади, происходящее за счет деформации объема, необходимо исключить, следовательно, его движение, как целого. Такое исключение совершается путем параллельного переноса (по траекториям) геометрии (метрики) из неподвижной системы в подвижную.

Так возникают относительные изменения осей, направляющих координатные площади, и вместе с ними – относительное изменение

$d\mathbf{S}^t$ вектора площади $d\mathbf{S}$, а также его скорость $\frac{d}{dt}d\mathbf{S}$, ускорение

$\frac{d^2}{dt^2}d\mathbf{S}$ и последующие производные. В итоге в ответ на действие

через поверхность ∂V^t выталкивающей силы $-\mathbf{f}$ окружающей среды на жидкий объем V^t им производится мгновенная реакция в виде вектора \mathbf{f} , определяемого рядом интегралов по поверхности

$$\mathbf{f} = \int_{\partial V^t} p_0 d\mathbf{S} + p_1 \frac{d}{dt} d\mathbf{S} + \dots,$$

из которых мы ограничиваемся только первыми двумя. Коэффициентом p_0 в первом интеграле оказывается динамическое давление среды, или ее молекулярное давление, с аддитивной поправкой на ее сжимаемость, которую еще предстоит определить. Коэффициентом p_1 во втором интеграле служит динамическая вязкость. Вычисление относительной производной вектора площади при этом приводит к вязким напряжениям.

Третья особенность. Традиционная поправка на сжимаемость в динамическом давлении отыскивается ниже физически понятным, но формально не очевидным требованием достижения минимума скорости диссипации механической энергии на однородных и изотропных деформациях невязкой среды.

Исходные положения сформулированы ниже в виде 8 аксиом, называемых заповедями гидродинамики. Заповеди связываются с наиболее близкими к ним именами основателей гидродинамики.

Вторая часть курса посвящена изложению формализующих исходные положения классических интегральных и дифференциальных законов сохранения для неподвижных объемов. Из основных физических характеристик при этом выделяются энтропия сжимаемого газа и энстрофия несжимаемой жидкости. Первой из них (вместе с

исходными уравнениями для конечного объема) при этом завершается короткий экскурс в область газодинамических течений. Элементарный же анализ второй характеристики, иллюстрируемый известным опытом по измерению механического эквивалента тепла, приводит к естественному выводу: среда греет себя своими вихрями. Вопрос же о том, откуда берутся вихри, по существу и составляет предмет теории гидродинамической устойчивости.

С математической точки зрения, наиболее содержательный раздел этой теории относится к течениями вязкой несжимаемой жидкости, описываемым соленоидальными (бездивергентными) векторными полями. К этому разделу и примыкают оставшиеся две части курса.

Третья часть касается трехмерного периодического слоя несжимаемой среды, как области между параллельными плоскостями, где векторные поля периодичны по двум ортогональным продольным (или зональным) переменным и удовлетворяют тем или иным граничным условиям на оставшейся поперечной (или вертикальной) переменной. Если таковыми оказываются условия периодичности (включая производные компонент поля произвольного порядка), то возникает трехмерный тор (пространство, факторизованное по целочисленной решетке).

Однако наиболее интересны (с прикладной точки зрения) условия прилипания к твердым стенкам (плоскостям), к которому и относится большинство задач по гидродинамической устойчивости: сдвиговый слой (смещение одной из граничных плоскостей) и течения с заданным продольным падением давления или перемешивающей внешней силой (ротором поля ускорений внешних массовых сил).

В любом случае традиционное исключение давления из уравнений вихрем (ротором) поля ускорения в периодическом слое затрудняется неоднозначностью последнего (наличием по меньшей

мере одной простой замкнутой кривой, не стягиваемой в точку в пределах данной области). Вторая часть посвящена в основном изложению альтернативной теории структурных потенциалов (не сводимых к контурным интегралам) и связанного с ними разложения произвольного поля периодического слоя (называемого ниже абс-разложением), дополняющего известные классические теоремы. Следствием нового разложения снова оказывается некоторая транспортная (исключающая давление) эквивалентная запись исходных уравнений движения, которой мы и ограничиваемся.

Заключительная четвертая часть курса относится к двумерному слою (отсутствие поперечной компоненты скорости и зависимости остальных переменных от соответствующей координаты). Здесь рассматриваются течения на торе (или периодической плоскости) или в топологическом кольце (или периодическом канале) с условиями прилипания на твердых стенках, при заданной перемешивающей силе в виде первой моды Фурье, направленной горизонтально и зависящей от одной вертикальной переменной.

Для тора эта задача привела некогда к неожиданному результату: в случае длины периодической ячейки, не превышающей ее высоты, т.е. при главном факторе ячейки, определяемым отношением длины к высоте, меньшем или равным 1, соответствующее основное (возмущаемое) течение глобально единственно и устойчиво, т.е. единственно и устойчиво при любой (сколь угодно малой) величине коэффициента внутреннего трения (кинематической вязкости).

Ниже этот результат переносится на канал. В этом случае допустимые значения главного фактора, обеспечивающие глобальную единственность и устойчивость основного течения, повышаются (могут несколько превосходить 1 за счет условий прилипания. Их точная верхняя грань определяется как отвечающая требованию минимальности соответствующего первого собственного числа, или

главного момента диссипативного волчка на квазикompактной алгебре, к которому и сводятся уравнение и граничные условия рассматриваемой задачи.

Квазикompактная алгебра расширяет понятие компактной алгебры (инфинитезимальной составляющей классической непрерывной группы преобразований) на случай бесконечной размерности: требование сохранения величины смешанного произведения при циклической перестановке его сомножителей ослабляется здесь условием выполнения его на всюду плотном множестве гильбертова пространства алгебры для сомножителя, выводимого при перестановке за пределы коммутатора.

Несмотря на относительную простоту, такое расширение доставляет некоторую нетривиальную структуру алгебре с коммутатором и скалярным произведением. Эта структура существенно используется при построении теории диссипативного волчка, которая объединяет уравнение волчка и 11 аксиом, связывающих между собой его коммутатор и операторы инерции и диссипации (трения).

Следствием устанавливаемой общей теоремы о глобальной (не зависящей от трения) устойчивости вращения волчка вокруг наибольшей оси его эллипсоида инерции (равной обратной величине квадратного корня наименьшего главного момента) и оказываются два упомянутых выше результата для течений на торе и в кольце.

При всех стараниях автора сделать курс достаточно доступным, он вынужден признать, что предлагаемые лекции рассчитаны на подготовленного читателя, с необходимым уровнем знаний, приближаемым (с требуемой точностью) первыми двумя курсам мехмата или физфака МГУ или любого факультета МФТИ или МИФИ.

Лекции ориентированы в основном на молодых специалистов в области математической и вычислительной гидродинамики. Они рассматриваются как дополнение к классическим курсам механики сплошных сред.

Часть 1. Элементы математической гидродинамики

§1. Геометрические элементы

1.1. Диорты, прямые произведения, дивекторы и свертки

Доказательства ниже следуют немедленно за утверждениями. Начало доказательства отмечается треугольником ◀, завершение - квадратом ■. Вместе с утверждениями доказательства при этом могут быть вложены одно в другое.

По повторному индексу, как и обычно, подразумевается суммирование, если обратное не оговаривается или не явствует из контекста.

Напомним *правило циклической перестановки*, в котором к записи (формуле, соотношению, и т.д.) из упорядоченной тройки знаков добавляется такая же запись, с одновременной заменой первого знака на второй, второго – на третий и третьего – на первый. Затем перестановка повторяется, что замыкает цикл (Рисунок 1).

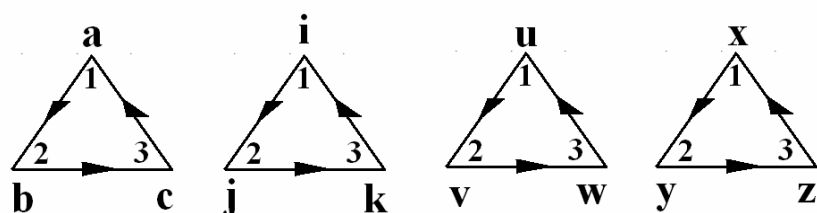


Рисунок 1 – Правило циклической перестановки.

Запись циклически повторяющихся формул часто будет ограничиваться только первой из них и продолжаться многоточием.

Запись $\mathbf{i}\mathbf{j}$, или прямое произведение упорядоченной пары орт \mathbf{i} и \mathbf{j} назовем *диортой* $\mathbf{i}\mathbf{j}$. Условимся интерпретировать диорту как действие вектора давления \mathbf{i} на координатную площадь с нормалью $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$. Само же действие обнаруживается *сверткой* диорты с нормалью: $\mathbf{i}\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i}$ (Рисунок 2).

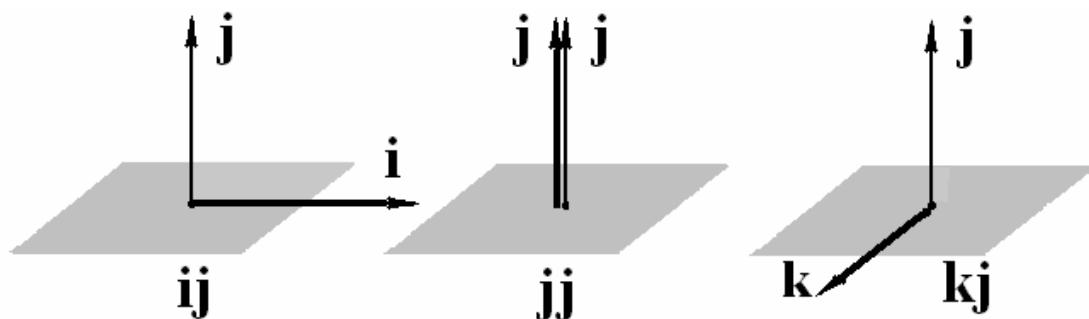


Рисунок 2 – Диорты $\mathbf{i}\mathbf{j}$, $\mathbf{j}\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}\mathbf{j}$ координатной площади с нормалью $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$, обнаруживающие себя силами $\mathbf{i}\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i}$, $\mathbf{j}\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j}$ и $\mathbf{k}\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k}$, соответственно.

Произведения сумм и пропорций орт естественно определить как суммы и пропорции произведений орт. В результате приходим к *прямому произведению* \mathbf{ab} произвольных векторов пространства \mathbf{a} и \mathbf{b} , на которое распространим привычные соглашения:

(i) линейность по каждому сомножителю,

$$(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})\mathbf{c} = \alpha(\mathbf{ac}) + \beta(\mathbf{bc}),$$

$$\mathbf{c}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{ca}) + \beta(\mathbf{cb})$$

$$(\alpha, \beta = const);$$

(ii) замкнутость по отношению к векторному произведению с векторами,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{bc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} \quad \text{и} \quad \mathbf{ab} \times \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c});$$

(iii) замкнутость по отношению к скалярному произведению путем образования *свертки* из сомножителей–векторов,

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad \text{и} \quad \mathbf{ab} \cdot \mathbf{uv} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v};$$

(iv) полнота свертки при ее повторении,

$$\mathbf{ab} \circ \mathbf{uv} \equiv \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}).$$

Прямое произведения векторов можно расширить до произвольных линейных комбинаций диорт вида

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{p}} = \vec{\bar{\mathbf{p}}} = & p^{xx}\mathbf{ii} + p^{yy}\mathbf{jj} + p^{zz}\mathbf{kk} + \\ & + p^{xy}\mathbf{ij} + p^{yx}\mathbf{ji} + p^{yz}\mathbf{jk} + p^{zy}\mathbf{kj} + p^{zx}\mathbf{ki} + p^{xz}\mathbf{ik}, \end{aligned}$$

которые и будем называть *дивекторами*.

Множество их образует линейное пространство с базисом из 9 диорт: трех *нормальных* – \mathbf{ii} , \mathbf{jj} и \mathbf{kk} , и шести *касательных* – \mathbf{jk} и \mathbf{kj} , \mathbf{ki} и \mathbf{ik} , \mathbf{ij} и \mathbf{ji} .

Сложение и пропорция в этом пространстве определяются обычными по координатам сложением и пропорцией, соответственно. Нулем служит дивектор $\vec{\mathbf{0}}$ с нулевыми компонентами $p^{xx} = p^{xy} = \dots = 0$. Противоположенные дивекторы $-\vec{\mathbf{p}}$ получаются обращением знаков у компонент: $-p^{xx}$, $-p^{xy}$,

С учетом аксиом прямого произведения, переносимых на диорты, данное пространство оказывается некоторой *алгеброй дивекторов*, сходной с алгеброй векторов, но обладающей большими возможностями. В частности, каждый дивектор однозначно разлагается на орты,

$$\vec{\mathbf{p}} = p^x\mathbf{i} + p^y\mathbf{j} + p^z\mathbf{k} = \mathbf{i}p^{x*} + \mathbf{j}p^{y*} + \mathbf{k}p^{z*},$$

с компонентами разложения – *прямыми* или *сопряженными действиями* p^x , p^y , p^z или p^{x*} , p^{y*} , p^{z*} , соответственно,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^x &= \vec{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{i} = p^{xx}\mathbf{i} + p^{yx}\mathbf{j} + p^{zx}\mathbf{k}, & \mathbf{p}^{x*} &= \mathbf{i} \cdot \vec{\mathbf{p}} = p^{xx}\mathbf{i} + p^{xy}\mathbf{j} + p^{xz}\mathbf{k}, \\ \mathbf{p}^y &= \vec{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{j} = p^{xy}\mathbf{i} + p^{yy}\mathbf{j} + p^{zy}\mathbf{k}, & \mathbf{p}^{y*} &= \mathbf{j} \cdot \vec{\mathbf{p}} = p^{yx}\mathbf{i} + p^{yy}\mathbf{j} + p^{yz}\mathbf{k}, \\ \mathbf{p}^z &= \vec{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{k} = p^{xz}\mathbf{i} + p^{yz}\mathbf{j} + p^{zz}\mathbf{k}, & \mathbf{p}^{z*} &= \mathbf{k} \cdot \vec{\mathbf{p}} = p^{zx}\mathbf{i} + p^{zy}\mathbf{j} + p^{zz}\mathbf{k}, \end{aligned}$$

Каждое прямое действие приложено к первой, второй и третьей координатным площадям, с нормальными $\mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}$, $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$ и $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$, соответственно, и разлагается на одну *нормальную* и две *касательные компоненты* по отношению к соответствующей площади, как показано на Рисунке 3 для действия \mathbf{p}^y .

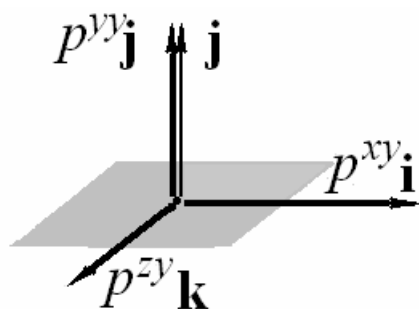


Рисунок 3 – Разложение действия \mathbf{p}^y , приложенного ко второй координатной площади, с нормалью $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$, на нормальную и касательные составляющие p^{yy} и p^{zy} , p^{xy} , соответственно.

Пространство дивекторов $\vec{\mathbf{p}}$, как очевидно, *линейно изоморфно* (т.е. вместе с суммой и пропорцией отображается взаимно однозначно на) многообразию вещественных матриц размера 3×3 , составленных из соответствующих компонент. В частности, меняя местами их касательные компоненты, получим *сопряженные дивекторы* вида

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{p}}^* &= \vec{\vec{\mathbf{p}}}^* = p^{xx}\mathbf{ii} + p^{yy}\mathbf{jj} + p^{zz}\mathbf{kk} + \\ &+ p^{yx}\mathbf{ij} + p^{xy}\mathbf{ji} + p^{zy}\mathbf{jk} + p^{yz}\mathbf{kj} + p^{xz}\mathbf{ki} + p^{zx}\mathbf{ik} = \\ &= \mathbf{p}^{x*}\mathbf{i} + \mathbf{p}^{y*}\mathbf{j} + \mathbf{p}^{z*}\mathbf{k} = \mathbf{ip}^x + \mathbf{jp}^y + \mathbf{kp}^z. \end{aligned}$$

Физически наибольший интерес представляют *дивекторные поля* $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}(t, x, y, z)$ (дивекторы, распределенные по точкам пространства), с совпадающими, равными нулю сопряженными касательными или одинаковыми диагональными компонентами,

$$p^{xy} = p^{yx}, \dots \quad (\vec{\mathbf{p}}^* = \vec{\mathbf{p}}),$$

$$p^{xy} = p^{yx} = 0, \dots \quad \text{или} \quad p^{xx} = p^{yy} = p^{zz},$$

описывающие соответственно *изотропные*, *нормальные* или *однородные* напряжения.

Простейшим примером нормального и однородного поля служит *дивекторная единица*

$$\vec{\delta} = \mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k},$$

которая сворачивается с ортами и диортами (а значит и с векторами и дивекторами), не меняя их:

$$\mathbf{i} \cdot \vec{\delta} = \vec{\delta} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ii} \cdot \vec{\delta} = \vec{\delta} \cdot \mathbf{ii} = \mathbf{ii}, \quad \mathbf{ij} \cdot \vec{\delta} = \vec{\delta} \cdot \mathbf{ij} = \mathbf{ij}, \quad \dots$$

Заметим, что она не сводится к прямому произведению пары векторов, в чем легко убедиться непосредственной проверкой:

$$\blacktriangleleft \quad (a^x \mathbf{i} + a^y \mathbf{j} + a^z \mathbf{k})(b^x \mathbf{i} + b^y \mathbf{j} + b^z \mathbf{k}) = \mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$$

$$\text{влечет} \quad a^x b^y = a^x b^z = b^x a^y = b^x a^z = 0$$

$$\text{и} \quad a^x b^x = a^y b^y = a^z b^z = 1, \quad \text{что невозможно} \quad \blacksquare$$

1.2. Элементы объема и площади

Малую область ΔV (подвижную или неподвижную), с выделенной точкой \mathbf{r}_0 (скажем, куб) обычно можно представить *телом*, т.е. многообразием точек

$$\mathbf{r} = x(a, b, c)\mathbf{i} + y(a, b, c)\mathbf{j} + z(a, b, c)\mathbf{k}, \quad 0 < da = a - a_0 < \varepsilon_1,$$

$$0 < db = b - b_0 < \varepsilon_2, \quad 0 < db = b - b_0 < \varepsilon_3,$$

описываемых локальными координатами a, b, c .

Достаточно малый объем ΔV приближается своим элементом dV , вычисляемым в точке $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(a_0, b_0, c_0)$ через якобиан J ,

$$\begin{aligned} dV &= J da db dc, \quad J = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial(y, z)}{\partial(b, c)} + \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial(z, x)}{\partial(b, c)} + \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial(x, y)}{\partial(b, c)} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial a} \left(\frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial z}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial c} \right) + \dots > 0, \end{aligned}$$

или, что равносильно, с помощью приведенного к якобиану и простого в обращении внешнего умножения Грассмана \wedge линейных комбинаций дифференциалов декартовых координат (их внешних форм), с коэффициентами – гладкими вещественными функциями,

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha dx + \beta dy + \gamma dz, \quad (\sigma \varphi) \wedge \varphi' = \sigma(\varphi \wedge \varphi'), \\ (\varphi_1 + \varphi_2) \wedge \varphi' &= \varphi_1 \wedge \varphi' + \varphi_2 \wedge \varphi', \quad \varphi \wedge \varphi' = -\varphi' \wedge \varphi, \\ dV &= dx \wedge dy \wedge dz = (dx \wedge dy) \wedge dz = dx \wedge (dy \wedge dz). \end{aligned}$$

Чтобы определить величину и направление площади, выделим элемент последней: малую часть поверхности, ориентированную в пространстве вектором своей нормали.

В терминах декартовых ортогональных координат, радиус вектора и направляющих орт,

$$\begin{aligned} x^1 &= x, \quad x^2 = y, \quad z = x^3, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \\ u \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} &= \frac{\partial x}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{i}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{k}, \end{aligned}$$

касательная площадка в точке поверхности

$$\mathbf{r} = x(a, b)\mathbf{i} + y(a, b)\mathbf{j} + z(a, b)\mathbf{k},$$

$$0 < da = a - a_0 < \varepsilon_1, \quad 0 < db = b - b_0 < \varepsilon_2,$$

нормалью к поверхности, полностью описывающий ее ориентированный элемент в пространстве, служит *вектор площади*

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} da db, \quad \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} \right| > 0.$$

Его проекциями на координатные оси служат *координатные площади*

$$dS_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \cdot d\mathbf{S}, \quad d\mathbf{S} = \frac{\partial x^j}{\partial \mathbf{r}} dS_j.$$

1.3. Близкодействия и далекодействия

Как явствует из определения дивергенции, компоненты p^{yy} , p^{zy} и p^{xy} дивектора $\vec{\mathbf{p}}$ естественно отождествлять с величинами сил, действующих соответственно в направлении второй, третьей и первой координатных осей y , z и x на единичную координатную площадь второй оси y , отнесенными к величине этой площади. Такие величины называют *напряжениями*.

С другой стороны, выделенный объем среды V подвержен действию сил, или векторов \mathbf{f} , приложенными как к его внутренним частицам, так и к точкам границы ∂V . На первые будем ссылаться как на *векторы далекодействия*, на вторые – как на *векторы близкодействия*. В роли первых выступают обычно внешние массовые силы. Вторые характеризует действие через границу окружающей объем среды.

Отмеченное геометрическое различие между векторами далекодействия и близкодействия носит, однако, сугубо *локальный* характер и существенно только для малых частей конечного объема

среды, из которых одна примыкает к границе, а вторая удалена от границы в глубину течения.

В целом в любой области течения, т.е. глобально близкое действие и дальное действие сводятся теоремой Остроградского–Гаусса к суммарному потоку векторов \mathbf{f} через границу ∂V по внешним нормальям $d\mathbf{S}$, равному интегралу от их дивергенции $\nabla \cdot \mathbf{f}$ во внутренних точках области V :

$$\int_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV$$

При этом силы естественно продолжить напряжениями:

$$\int_{\partial V} \vec{\mathbf{p}}^* \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{p}} dV$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \int_{\partial V} \vec{\mathbf{p}}^* \cdot d\mathbf{S} &= \mathbf{i} \left(\int_{\partial V} \mathbf{p}^x \cdot d\mathbf{S} \right) + \dots = \left(\int_V \nabla \cdot \mathbf{p}^x dV \right) \mathbf{i} + \dots = \\ &= \int_V \nabla \cdot (\mathbf{p}^x \mathbf{i} + \dots) dV = \int_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{p}} dV \blacksquare \end{aligned}$$

Например, измеряемый величиной p однородного и изотропного (например, атмосферного) давления дивектор напряжений

$$\vec{\mathbf{p}} = p \vec{\delta}, \quad p = p(t, x, y, z)$$

определяется вектором результирующей силы

$$\mathbf{f} = \int_{\partial V} p d\mathbf{S} = \int_V (\nabla p) dV$$

$$\blacktriangleleft \vec{\delta} \cdot d\mathbf{S} = dS \quad \text{и} \quad \nabla \cdot \vec{\delta} = \nabla \blacksquare$$

1.4. Динамические напряжения и напряжения деформаций

Все величины предполагаются непрерывно распределенными в сплошной среде, т.е. гладкими, или бесконечно дифференцируемыми вещественными функциями точки и времени. Отнесенные к ее

плотности $\rho > 0$, они дают соответствующие распределения исходных величин по массе среды, или *удельные* величины.

Приведем необходимый список удельных напряжений, производимых вектором скорости

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}w.$$

Список удельных напряжений открывают *динамические напряжения* среды uu , uv , \dots , с дивектором

$$\mathbf{uu} = uu\mathbf{i} + uv\mathbf{j} + wu\mathbf{k} = \mathbf{i}uu + \mathbf{j}vu + \mathbf{k}wu.$$

Далее, дивектор $\nabla\mathbf{u}$ *скоростей деформаций* u_x , u_y , \dots , получается действием градиента

$$\nabla = \mathbf{i}\partial_x + \mathbf{j}\partial_y + \mathbf{k}\partial_z \quad (\partial_x = \partial/\partial x, \dots)$$

на вектор скорости \mathbf{u} :

$$\nabla\mathbf{u} = (\nabla u)\mathbf{i} + (\nabla v)\mathbf{j} + (\nabla w)\mathbf{k} = \mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y + \mathbf{k}u_z.$$

Его сумма со своим сопряжением

$$(\nabla\mathbf{u})^* = \mathbf{i}(\nabla u) + \mathbf{j}(\nabla v) + \mathbf{k}(\nabla w) = \mathbf{u}_x\mathbf{i} + \mathbf{u}_y\mathbf{j} + \mathbf{u}_z\mathbf{k}$$

приводит к симметричному дивектору *напряжений деформаций* сплошной среды, производимых полем скоростей,

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^* = \mathbf{i}\tau^x + \mathbf{j}\tau^y + \mathbf{k}\tau^z = \tau^x\mathbf{i} + \tau^y\mathbf{j} + \tau^z\mathbf{k},$$

$$\tau^x = \nabla u + \mathbf{u}_x, \quad \tau^y = \nabla v + \mathbf{u}_y, \quad \tau^z = \nabla w + \mathbf{u}_z,$$

$$\text{или} \quad \bar{\boldsymbol{\tau}} = 2u_x\mathbf{ii} + 2v_y\mathbf{jj} + 2w_z\mathbf{kk} +$$

$$+ (w_y + v_z)(\mathbf{jk} + \mathbf{kj}) + (u_z + w_x)(\mathbf{ki} + \mathbf{ik}) + (v_x + u_y)(\mathbf{ij} + \mathbf{ji})$$

а разность – к кососимметричному дивектору

$$\nabla\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})^* =$$

$$+ (w_y - v_z)(\mathbf{jk} + \mathbf{kj}) + (u_z - w_x)(\mathbf{ki} + \mathbf{ik}) + (v_x - u_y)(\mathbf{ij} + \mathbf{ji}),$$

определяемому компонентами *завихренности поля скоростей*

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = (w_y - v_z)\mathbf{i} + (u_z - w_x)\mathbf{j} + (v_x - u_y)\mathbf{k}.$$

Последняя оказывается, таким образом, векторной характеристикой деформаций сплошной среды.

1.5. Мощность напряжений и скорость диссипация

В роли скалярной характеристики деформаций выступает дивергенция поля скоростей, или *сжимаемость среды*:

$$\mathcal{C} = \nabla \cdot \mathbf{u} = u_x + v_y + w_z.$$

Объемная плотность работы деформаций среды, производимую в секунду симметричным дивектором напряжений $\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}^*$, или *мощность напряжений деформаций* в единице объема сплошной среды ниже определится сверткой

$$\begin{aligned} (\vec{\mathbf{p}} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{p}^x \cdot \nabla u + \mathbf{p}^y \cdot \nabla v + \mathbf{p}^z \cdot \nabla w = \\ &= p^{xx} u_x + p^{yy} v_y + p^{zz} w_z = \\ &+ p^{xy} (v_x + u_y) + p^{yz} (w_y + v_z) + p^{zx} (u_z + w_x), \\ p^{xy} &= p^{yx}, \quad p^{yz} = p^{zy}, \quad p^{zx} = p^{xz}. \end{aligned}$$

Для последней справедлива *формула дифференцирования по частям*:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}) &= (\nabla \cdot \vec{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{u} + (\vec{\mathbf{p}} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}, \quad \vec{\mathbf{p}}^* = \vec{\mathbf{p}}: \\ \blacktriangleleft (\nabla \cdot \vec{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{u} &= (\nabla \cdot \mathbf{p}^x) u + (\nabla \cdot \mathbf{p}^y) v + (\nabla \cdot \mathbf{p}^z) w = \\ &= \nabla \cdot (\mathbf{p}^x u + \mathbf{p}^y v + \mathbf{p}^z w) - \mathbf{p}^x \cdot \nabla u - \mathbf{p}^y \cdot \nabla v - \mathbf{p}^z \cdot \nabla w = \\ &= \nabla \cdot \left((\mathbf{p}^x \mathbf{i} + \mathbf{p}^y \mathbf{j} + \mathbf{p}^z \mathbf{k}) \cdot \mathbf{u} \right) - \left((\mathbf{i} \mathbf{p}^x + \mathbf{j} \mathbf{p}^y + \mathbf{k} \mathbf{p}^z) \cdot \nabla \right) \cdot \mathbf{u} = \\ &= (\nabla \cdot \vec{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{u} + (\vec{\mathbf{p}}^* \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} \blacksquare \end{aligned}$$

Скорость рассеивания, или диссипация механической энергии в тепловую в единице массы среды, ниже окажется пропорциональной свертке

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= (\vec{\tau} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = \tau^x \cdot \mathbf{u}_x + \tau^y \cdot \mathbf{u}_y + \tau^z \cdot \mathbf{u}_z = \\ &= 2u_x^2 + 2v_y^2 + 2w_z^2 + (v_x + u_y)^2 + (w_y + v_z)^2 + (u_z + w_x)^2,\end{aligned}$$

на которую будем кратко ссылаться как на *диссипацию*.

Диссипация связана с завихренностью и сжимаемостью:

$$\dot{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}^2 + 2\mathcal{C}^2 + 2\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathcal{C}\mathbf{u}), \quad \text{где } \boldsymbol{\omega}^2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

◀ Действительно, очевидные тождества

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^2 &= (v_x + u_y)^2 + (w_y + v_z)^2 + (u_z + w_x)^2 - \\ &\quad - 4v_x u_y - 4w_y v_z - 4u_z w_x\end{aligned}$$

и

$$\mathcal{C}^2 = u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 + 2u_x v_y + 2v_y w_z + 2w_z u_x$$

влекут

$$\boldsymbol{\omega}^2 + 2\mathcal{C}^2 = \dot{\varepsilon} - 2\Upsilon$$

$$\Upsilon = 2(v_x u_y - u_x v_y) + 2(w_y v_z - v_y w_z) + 2(u_z w_x - w_z u_x),$$

а тождества

$$v_x u_y - u_x v_y = (v u_y)_x - (v u_x)_y = (w_x)_y - (w_y)_x, \dots$$

влекут

$$2(v_x u_y - u_x v_y) = (v u_y - w_y)_x + (w_x - v u_x)_y, \dots$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\Upsilon &= (v u_y - w_y)_x + (w_x - v u_x)_y + (w_z - v w_z)_y + \\ &\quad + (v w_y - w v_y)_z + (w_x - w u_x)_z + (w u_z - w w_z)_x =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (uu_x + vu_y + wu_z - uu_x - uv_y - uw_z)_x + \dots \\
&= (\mathbf{u} \cdot \nabla u - u \nabla \cdot \mathbf{u})_x + \dots = \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u}) \blacksquare
\end{aligned}$$

1.6. Неоднородность и анизотропия деформаций

Вводя в рассмотрение еще две скалярные характеристики деформаций, *неоднородность*

$$\mathbf{A} = \sqrt{(u_x - v_y)^2 + (v_y - w_z)^2 + (w_z - u_x)^2}$$

и *анизотропию деформаций*

$$\mathbf{B} = \sqrt{(v_x + u_y)^2 + (w_y + v_z)^2 + (u_z + w_x)^2},$$

и воспользовавшись непосредственно проверяемым тождеством

$$\mathbf{A}^2 + \mathbf{C}^2 = 3(u_x^2 + v_y^2 + w_z^2)$$

получим новую формулу для диссипации

$$\dot{\varepsilon} = \frac{2}{3} \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \frac{2}{3} \mathbf{C}^2.$$

Как следствие, диссипация тем меньше, чем меньше неоднородность сжатий и анизотропность деформаций.

В отсутствие последних диссипация достигает своего положительного минимума, а именно – при однородном ($\mathbf{A} = 0$) и изотропном ($\mathbf{B} = 0$) растяжении ($\mathbf{C} \geq 0$) или сжатии ($\mathbf{C} \leq 0$) среды:

$$\dot{\varepsilon} \geq \min_{\bar{\mathbf{u}}} \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} \Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{B}=0, \mathbf{C} \neq 0} = \frac{2}{3} \mathbf{C}^2.$$

Если вычесть эту наименьшую диссипацию из исходной, то получим величину

$$\dot{\delta} = \dot{\varepsilon} - \frac{2}{3} \mathbf{C}^2 \geq \min_{\bar{\mathbf{u}}} \dot{\delta} = \dot{\delta} \Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{B}=0, \mathbf{C} \neq 0} = 0,$$

на которую естественно сослаться как на *точную диссипацию*: наименьшее значение этой неотрицательной величины равно 0.

Точную диссипацию $\dot{\delta}$ часто называют *функцией диссипации*, или *диссипативной функцией*. Как мы увидим ниже, в отсутствие тепловых потерь именно она (а не $\dot{\varepsilon}$) и определяет максимально возможную величину механической энергии, передаваемую ежесекундно в единицей массы среды молекулярному движению благодаря наличию вязкости (внутреннего трения) среды.

В *соленоидальной среде*, где по определению дивергенция поля скоростей равна нулю, $\mathbf{C} = 0$ (поле \mathbf{u} *бездивергентно*, или *соленоидально*), диссипация является точной:

$$\dot{\delta} = \dot{\varepsilon} \quad \text{при} \quad \mathbf{C} = 0.$$

В *простой среде*, где, по определению, всюду сжатия однородны, $\mathbf{A} = 0$, а деформации изотропны, $\mathbf{B} = 0$, диссипация минимальна:

$$\dot{\delta} = \dot{\varepsilon} - \frac{2}{3}\mathbf{C}^2 = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{или при} \quad u_x = v_y = w_z,$$

$$\text{и} \quad v_x + u_y = w_y + v_z = u_z + w_x = 0.$$

В *замкнутой среде*, или *простой несжимаемой среде*, диссипация равна 0:

$$\dot{\delta} = \dot{\varepsilon} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C} = 0,$$

$$\text{или при} \quad u_x = v_y = w_z = 0,$$

$$\text{и} \quad v_x + u_y = w_y + v_z = u_z + w_x = 0.$$

§2. Кинематические элементы

2.1. Конвективное ускорение частиц

Переносимые траекториями течения \mathbf{u} частицы (точки) среды

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r} + \int_0^t \mathbf{u}(t', \mathbf{r}_{t'}) dt',$$

$$\text{или } x_t^j = x^j + \int_0^t u^j(t', x_{t'}^1, x_{t'}^2, x_{t'}^3) dt', \quad j=1,2,3,$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z,$$

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \quad u^1 = u, \quad u^2 = v, \quad u^3 = w,$$

меняют величины

$$\varphi = \varphi^t = \varphi_t = \varphi(t, x_t^1, x_t^2, x_t^3), \quad t \geq 0,$$

со скоростью конвективной производной

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t+\tau} - \varphi_t}{\tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi,$$

С этой же скоростью течение \mathbf{u} переносит и свои компоненты. Разностью между соответствующими абсолютным и относительным ускорениями служит открытое Эйлером переносное, или *конвективное ускорение* частицы среды

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}.$$

2.2. Производная элемента объема

Однако даже с учетом конвективного ускорения сплошная среда не может быть описана совокупностью своих частиц. Ее движение составляют перемещения *подвижных*, или *жидких объемов*

$$V_t = \left\{ \mathbf{r}_t = \mathbf{r} + \int_0^t \mathbf{u}(t', \mathbf{r}_{t'}) dt' = \mathbf{r} + t\mathbf{u} + o(t), \mathbf{r} \in V \right\}$$

сплошной среды (заполнявших в начальный момент времени наблюдения $t = 0$ выделенные области пространства V), не только переносимых траекториями, но и деформируемых ими.

Изменение величины переносимого *элемента объема* на малом интервале времени,

$$\begin{aligned} dV_t &= (dx + tdu) \wedge (dy + tdv) \wedge (dz + tdw) + o(t) = \\ &= dx \wedge dy \wedge dz + \\ &+ t(du \wedge dy \wedge dz + dx \wedge dv \wedge dz + dx \wedge dy \wedge dw) + o(t) = \\ &= (1 + t(u_x + v_y + w_z)) dx \wedge dy \wedge dz + o(t) \end{aligned}$$

приводит к *производной*

$$\frac{d}{dt} dV = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dV_t - dV}{t} = \mathbf{C} dV, \quad \mathbf{C} = \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Как следствие, скорость изменения *плотности распределения* $\varphi = \varphi^t = \varphi(t, x, y, z)$ какого-либо *объемного элемента* φdV определяется *материальной производной* вида:

$$\begin{aligned} \frac{D\varphi}{Dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \varphi \mathbf{u} = \frac{d\varphi}{dt} + \mathbf{C}\varphi. \\ \blacktriangleleft \frac{d}{dt} \varphi dV &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi^{t+\varepsilon} dV_{t+\varepsilon} - \varphi^t dV_t}{\varepsilon} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi^{t+\varepsilon} - \varphi^t}{\varepsilon} dV_{t+\varepsilon} + \varphi^t \frac{dV_{t+\varepsilon} - dV}{\varepsilon} \right) = \\
&= \frac{d\varphi}{dt} dV + \varphi \frac{d}{dt} dV = \frac{D\varphi}{Dt} dV \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.3. Скорость деформации элемента площади

В сумме частицы сплошной среды \mathbf{r}_t в каждый момент времени движения $t > 0$ формируют локально систему *подвижных*, или *лагранжевых координат* x_t^j , связанных неявно гладкими и обратимыми зависимостями

$$x_t^j(x^1, x^2, x^3) = x^j + \int_0^t u^j(t', x_{t'}^1, x_{t'}^2, x_{t'}^3) dt',$$

$$j = 1, 2, 3, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \text{const} > 0,$$

с *неподвижными*, или *эйлеровыми координатами* x^j по меньшей мере на малом промежутке времени движения t (следствие существования, единственности и гладкости непрерывного решения данной системы интегральных уравнений при заданном гладком поле скоростей для достаточно малого ε_0).

Своими координатными осями

$$\frac{\partial \mathbf{r}_t}{\partial x^j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} + t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} + \mathbf{o}(t),$$

новые подвижные координаты деформируют координатный гексаэдр $0 < x^{1,2,3} < \varepsilon_{1,2,3}$, $t = 0$, в некоторый параллелепипед.

Одновременно они производят коэффициенты *обратных деформаций*

$$\frac{\partial x^k}{\partial x_t^j} = \delta_j^k - t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} + \mathbf{o}(t), \text{ или } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_t^j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} - t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} + \mathbf{o}(t)$$

$$\left(\delta_j^k = \frac{\partial x^k}{\partial x^j} = 1 \quad (= 0) \quad \text{при } k = j \quad (k \neq j) \right),$$

или деформаций неподвижного координатного гексаэдра относительно подвижных осей.

Образуемая подвижными координатами новая геометрия описывается *метриками*

$$g_{jk}^t(x_t^1, x_t^2, x_t^3) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_t^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_t^k} \quad \text{или} \quad g_t^{jk}(x_t^1, x_t^2, x_t^3) = \frac{\partial x_t^j}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial x_t^k}{\partial \mathbf{r}}$$

(прямой или обратной, соответственно).

Повороты и растяжения (сжатия) подвижных осей в новой геометрии,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_t^j} = g_{jk}^t \frac{\partial x_t^k}{\partial \mathbf{r}} \quad \text{или} \quad \frac{\partial x_t^j}{\partial \mathbf{r}} = g_t^{jk} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_t^k},$$

преобразуют *ковариантно* (как компоненты градиента) *координатные площади*,

$$dS_j^t = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_t^j} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial x^k}{\partial x_t^j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial x^k}{\partial x_t^j} dS_k,$$

оставляя *инвариантным* вектор площади

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial x^k}{\partial \mathbf{r}} dS_k = \frac{\partial x_t^j}{\partial \mathbf{r}} dS_j^t.$$

Поэтому деформации площади естественно измерять *изменением вектора площади* $d\mathbf{S}^t$ относительно неподвижной системы координат.

Для построения этого вектора произведем *параллельный перенос* неподвижной геометрии вдоль траекторий путем замены в исходной формуле метрики

$$g_0^{jk}(x^1, x^2, x^3) = \delta^{jk} = 1 \quad (=0) \quad \text{при } k = j \quad (k \neq j).$$

неподвижных координат подвижными.

Такая замена приведет к следующей *относительной метрике*

$$\tilde{g}_t^{jk} = g_0^{jk}(x_t^1, x_t^2, x_t^3) = g_0^{jk} + t\mathbf{u} \cdot \nabla g_0^{jk} + o(t).$$

Для рассматриваемого случая декартовых координат последняя будет слабо отличаться от исходной:

$$\tilde{g}_t^{jk} = \delta^{jk} + o(t).$$

Поэтому производимые параллельным переносом геометрии *изменения направляющих координатных площадей*

$$\frac{\delta x_t^j}{\delta \mathbf{r}} = \tilde{g}_t^{jm} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_t^m},$$

определяются в основном коэффициентами обратных деформаций.

Заменив вектор площади

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial x_t^j}{\partial \mathbf{r}} dS_j^t$$

его отмеченным *относительным изменением при параллельном переносе*

$$d\mathbf{S}^t = \frac{\delta x_t^j}{\delta \mathbf{r}} dS_j^t,$$

вычислим малую величину и направление этого изменения в пространстве:

$$\begin{aligned} d\mathbf{S}^t &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_t^m} \tilde{g}_t^{jm} \frac{\partial x^k}{\partial x_t^j} dS_k = \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^m} - t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^m} \right) \delta^{jm} \left(\frac{\partial x^k}{\partial x^j} - t \frac{\partial u^j}{\partial x^j} \right) dS_k + o(t) = \\ &= d\mathbf{S} + t \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k} \cdot d\mathbf{S} + o(t). \end{aligned}$$

Соответствующая скорость деформации элемента площади, определяется, следовательно, обратными нормальными действиями $\boldsymbol{\tau}^k$ дивектора деформаций

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau}^k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k}, \quad \boldsymbol{\tau}^k = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial \mathbf{r}},$$

на элементы площади:

$$\frac{d}{dt} d\mathbf{S} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (d\mathbf{S}^t - d\mathbf{S}) = -\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot d\mathbf{S}.$$

2.4. Производные конечных объемов и площадей

Для распределения $\varphi = \varphi^t = \varphi(t, x, y, z)$ какой-либо скалярной величины в подвижном объеме $V = V^t$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_{V^{t+\varepsilon}} \varphi^{t+\varepsilon} dV^{t+\varepsilon} &= \int_V \left(\varphi + \varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + o(\varepsilon) \right) (1 + \varepsilon \mathbf{C} + o(\varepsilon)) dV = \\ &= \int_V \varphi dV + \varepsilon \int_V \left(\frac{d\varphi}{dt} + \mathbf{C}\varphi \right) dV + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla = \frac{D}{Dt} - (\nabla \cdot \mathbf{u}),$$

что дает совпадение скорости изменения величины, переносимой жидким объемом с интегралом по данному объему от материальной производной распределения, который вследствие теоремы Остроградского–Гаусса разлагается на сумму внутренних источников и граничный поток:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varphi dV = \int_{V^t} \frac{D\varphi}{Dt} dV = \int_{V^t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \int_{\partial V^t} \varphi \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$$

(формула производной интеграла по объему).

Для распределения (дивекторного) $\vec{\Psi} = \vec{\Psi}^t = \vec{\Psi}(t, x, y, z)$ какой-либо векторной величины на границе подвижного объема $\partial V = \partial V^t$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V^{t+\varepsilon}} \vec{\Psi}^{t+\varepsilon} \cdot d\mathbf{S}^{t+\varepsilon} &= \int_{\partial V} \left(\vec{\Psi} + \varepsilon \frac{d\vec{\Psi}}{dt} \right) \cdot (d\mathbf{S} - \varepsilon \vec{\tau} \cdot d\mathbf{S}) + \mathbf{o}(\varepsilon) = \\ &= \int_{\partial V} \vec{\Psi} \cdot d\mathbf{S} + \varepsilon \left(\int_{\partial V} \frac{d\vec{\Psi}}{dt} \cdot d\mathbf{S} - \int_{\partial V} \vec{\Psi} \cdot \vec{\tau} \cdot d\mathbf{S} \right) + \mathbf{o}(\varepsilon), \end{aligned}$$

что дает совпадение скорости изменения потока векторного поля по внешней нормали сквозь границу с интегралом дивергенции его дивекторного распределения внутри объема:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial V^t} \vec{\Psi} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial V^t} \left(\frac{d\vec{\Psi}}{dt} - \vec{\Psi} \cdot \vec{\tau} \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_{V^t} \nabla \cdot \left(\frac{d\vec{\Psi}}{dt} - \vec{\Psi} \cdot \vec{\tau} \right) dV$$

(формула производной интеграла по границе объема).

В частности, внутренним источником скорости изменения ориентированной границы в целом при однородном и изотропного распределении на ее поверхности силового поля, с плотностью μ , служит дивергенция дивектора деформаций:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial V^t} \mu d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial V^t} \mu \vec{\delta} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V^t} \nabla \cdot \mu \vec{\delta} \cdot \vec{\tau} dV = \int_{V^t} \nabla \cdot \mu \vec{\tau} dV.$$

Для случая простейших распределений $\varphi = \mu = 1$ получаем скорости изменения объема и вектора границы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V^t} dV = \int_{\partial V^t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \quad u \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial V^t} d\mathbf{S} = \int_{V^t} \nabla \cdot \vec{\tau} dV.$$

§3. Динамические элементы (8 заповедей гидродинамики)

3.1. Сохранение массы (от Даниила Бернулли)

Следующие 8 основных положений, законов или, если угодно, аксиом механики жидкости и газа (или гидродинамики), включают основные динамические элементы движения сплошной среды. Эти положения приводятся как заповеди, идущие от Имен, как представляется, имеющих к ним непосредственное отношение.

Содержание заповедей приводится в современной трактовке, т.е. на базе изложенных выше геометрических и кинематических элементов. Возможно, их имена и содержание, нуждаются в дальнейших пояснениях. Но едва ли оспорим тот факт, что своим первым точным законом математическая гидродинамика возникла 23 века назад открытием Архимедом величины основного действия сплошной среды, ее выталкивающей силы, измеряемой весом вытесненной жидкости.

Итак, при движении жидкого объема V^t сохраняется распределенная в нем с плотностью $\rho = \rho(t, \mathbf{r}) > 0$ масса среды, как сумма своих элементов ρdV :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V^t} \rho dV = 0.$$

3.2. Выталкивающая сила (от Архимеда и Эйлера)

От сыпучего материала (муки, зерна, земли, песка,...) сплошную среду (воздух, воду, пар, масло, мед,...) отличает ее *выталкивающая*

сила $-\mathbf{f}$, аддитивно дополняющая оказываемое на объем V^t действие внешних сил, приложенных к его элементам массы ρdV с заданным полем ускорений \mathbf{g} :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V^t} \mathbf{u} \rho dV = \int_{V^t} \mathbf{g} \rho dV - \mathbf{f}.$$

Она сообщается объему V^t окружающей средой непосредственно через его границу ∂V^t и уравнивается его реакцией \mathbf{f} как суммой элементов поверхностных сил $\vec{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{S}$ изотропного поля напряжений $\vec{\mathbf{p}}$:

$$\mathbf{f} = \int_{\partial V^t} \vec{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{S}, \quad \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}^*.$$

3.3. Сохранение энергии (от Майера, Джоуля и Гельмгольца)

Объемы среды обладают *внутренней энергией*, распределенной по элементам массы ρdV с плотностью $e > 0$. Она пропорциональна абсолютной температуре T , с коэффициентом – механическим эквивалентом тепла, измеряемым теплоемкостью при постоянном объеме c_v :

$$e = c_v T, \quad c_v = const > 0.$$

Своими внутренними *напряжениями* $\vec{\mathbf{p}}$ объемы совершают *работу деформации* по преодолению действия выталкивающей силы окружающей среды. *Мощность* этой работы определяется на границе *вектором потока напряжений* $\vec{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}$.

Каждый объем приобретает или, напротив, теряет энергию, переносимую через границу со скоростью *вектора потока тепла* \mathbf{q} .

В сумме с изменением полной энергии подвижного объема, слагаемой из его кинетической и внутренней энергий, работа сил деформаций уравнивает тепловые потери:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V^t} \rho E dV + \int_{\partial V^t} \vec{p} \cdot \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial V^t} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S}, \quad E = \frac{\mathbf{u}^2}{2} + e.$$

3.4. Тепловые потери (от Фурье)

Вектор плотности потока тепла \mathbf{q} через границу объема пропорционален ее градиенту температуры T , с коэффициентом пропорциональности – *теплопроводностью* среды κ :

$$\mathbf{q} = \kappa \nabla T, \quad \kappa > 0.$$

3.5. Динамическая вязкость (от Ньютона и Навье)

Мгновенной реакцией \mathbf{f} подвижного объема V^t на выталкивающую силу близкодействия окружающей среды $-\mathbf{f}$ будет сумма создаваемых им на границе ∂V^t сил однородного и изотропного *динамического давления* p_μ и скорости деформации векторов площади $d\mathbf{S}$, с *коэффициентом динамической вязкости* среды $\mu > 0$:

$$\mathbf{f} = \int_{\partial V^t} p_\mu d\mathbf{S} + \mu \frac{d}{dt} d\mathbf{S}.$$

3.6. Давление молекул (от Паскаля и Торричелли)

В отсутствии вязкости напряжения определяются производимым движением молекул *давлением* $p = p(t, x, y, z) > 0$:

$$\mathbf{f} = \int_{\partial V^t} p d\mathbf{S} \quad \text{при} \quad \mu = 0.$$

3.7. Поправка на сжимаемость (от Сен-Венана и Стокса)

Скорость изменения внутренней энергии

$$\dot{e}_{V^t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V^t} \rho e dV$$

подвижного теплоизолированного объема V^t ($\mathbf{q} \cdot d\mathbf{S}|_{\partial V^t} = 0$) свободной ($\mathbf{g} = \mathbf{0}$) и сжимаемой ($C \neq 0$) среды достигает своей наименьшей величины в пределе исчезающих вязкости и теплопроводности:

$$\min_{\mathbf{u}} \dot{e}_{V^t} \Big|_{\mathbf{q} \cdot d\mathbf{S}|_{\partial V^t} = 0, \mathbf{g} = \mathbf{0}, C \neq 0} = \lim_{\mu, \kappa \rightarrow 0} \dot{e}_{V^t},$$

3.8. Нормальные среды (от Менделеева и Клапейрона)

Обычная среда *нормальна* в том смысле, что находится в состоянии термодинамического равновесия, приближаемого *несжимаемой жидкостью*, где

$$\rho = \text{const} > 0,$$

или *идеальным газом*, где

$$\rho \neq \text{const} \quad \text{и} \quad p = \sigma \rho e, \quad \sigma = \gamma - 1, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1,$$

и c_p – теплоемкость при постоянном давлении p .

Часть 2. Классические законы сохранения

§4. Основные интегральные соотношения

4.1. Уравнение неразрывности

Основным содержанием исходных положений (или заповедей) механики жидкости и газа (приведенных выше) служат классические законы сохранения массы, импульса (количества движения) и энергии перемещаемых и деформируемых объемов сплошной среды. Наша ближайшая задача – придать им необходимую форму записи для произвольного фиксированного объема.

Для этого в предыдущих рассуждениях следует перейти от подвижных объемов $V = V^t$ к неподвижным объемам $V = V^0$, или, что равносильно, от лагранжевых координат $x^t = x_t^1$, $y^t = x_t^2$ и $z^t = x_t^3$ к элеровым координатам $x = x^1 = x_0^1$, $y^0 = x^2 = x_t^2$ и $z = x^3 = x_0^3$.

Выбор условного начального момента времени движения, разумеется, при этом не играет роли. Им может служить произвольный момент времени, так что предыдущие рассуждения допускают одновременные замены моментов $0 \rightarrow t$ и $t \rightarrow t' > t$.

Кроме того, будем учитывать, что вырождение интеграла по любому сколь угодно малому объему ΔV равносильно вырождению интегрируемой величины (лемма Дю Буа–Реймонда).

Согласно *первому положению* 3.1 сохранение массы (первая заповедь) принимает тогда форму справедливого в каждый момент времени движения $t > 0$ и в любой точке x, y, z заданной области течения V уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad \blacktriangleleft \frac{\partial}{\partial t} \int_{V^t} \rho dV = \int_{V^t} \frac{D\rho}{Dt} dV \quad \blacksquare$$

Проинтегрировав полученное тождество по произвольному неподвижному объему $\Delta V \subset V$, с учетом теоремы Остроградского–Гаусса, получим его *интегральную форму*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \rho dV + \int_{\partial \Delta V} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

4.2. Уравнения импульсов

Аналогичными рассуждениями из *второго положения 3.2* следуют скалярные *уравнения импульсов*

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{u} + \mathbf{p}^x) = \rho g^x,$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{u} + \mathbf{p}^y) = \rho g^y,$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{u} + \mathbf{p}^z) = \rho g^z,$$

объединяемые векторным соотношением

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \vec{\mathbf{p}}) = \rho \mathbf{g},$$

равносильным интегральному тождеству

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \rho \mathbf{u} dV + \int_{\partial \Delta V} (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \vec{\mathbf{p}}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta V} \rho \mathbf{g} dV.$$

◀ Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V^t} \rho \mathbf{u} dV &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V^t} \rho u dV + \dots \\ &= \mathbf{i} \left(\int_{V^t} \frac{\partial \rho u}{\partial t} dV + \int_{\partial V^t} \rho u \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \right) + \dots = \int_{V^t} \left(\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \right) dV, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V^t} \mathbf{u} \rho dV = \int_{V^t} \mathbf{g} \rho dV - \mathbf{f} \quad \text{и} \quad \mathbf{f} = \int_{\partial V^t} \vec{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V^t} \nabla \cdot \vec{\mathbf{p}} dV,$$

причем область $V^t = \Delta V$ в произвольный фиксированный момент времени движения $t > 0$ (как условный начальный момент) может быть выбрана сколь угодно малой ■

4.3. Уравнение энергии

В силу *третьего положения 3.3* справедливо уравнение энергии

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} + \vec{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}) = 0,$$

равносильное, как очевидно, интегральному тождеству

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \rho E dV + \int_{\partial \Delta V} (\rho E \mathbf{u} + \vec{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

в произвольном конечном объеме ΔV области течения V .

◀ Действительно, имеем в 3.3:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V^t} \rho E dV = \int_{V^t} \left(\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot \rho E \mathbf{u} \right) dV$$

$$\text{и} \quad \int_{\partial V^t} (\vec{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{V^t} \nabla \cdot (\vec{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q}) dV, \quad V^t = \Delta V \quad \blacksquare$$

4.4. Формула напряжений

С учетом уравнения неразрывности, векторное уравнение импульсов сводится уравнению движения частицы среды

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{p}} = \rho \mathbf{g} \quad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right).$$

◀ Действительно, имеем:

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = \nabla \cdot \rho \mathbf{u} (\mathbf{i} u + \dots) = (\nabla \cdot \rho \mathbf{u}) (\mathbf{i} u + \dots) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{i} u + \dots) =$$

$$= (\nabla \cdot \rho \mathbf{u}) \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0, \text{ следовательно,}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \right) \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad \blacksquare$$

Умножив обе части уравнения движения скалярно на вектор скорости, с учетом доказанной выше (в разделе 1.5) формулы дифференцирования по частям

$$\nabla \cdot (\vec{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}) = (\vec{\mathbf{p}} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} + (\nabla \cdot \vec{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{u}, \quad \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}^*,$$

получим следующее уравнение механической энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} + \nabla \cdot \left(\frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \mathbf{u} + \vec{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u} \right) = \vec{\mathbf{p}} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}$$

◀ Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \rho \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{u}^2}{2} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} + \nabla \cdot \frac{\rho \mathbf{u}^2}{2} \mathbf{u} \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \right) \\ &\text{и } \nabla \cdot (\vec{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u}) - (\vec{\mathbf{p}} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = (\nabla \cdot \vec{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{u} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Вычтя уравнение механической энергии из уравнения энергии, получим уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u} - \mathbf{q}) = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u},$$

которое, с одной стороны, также может быть переписано в терминах полной производной

$$\rho \frac{de}{dt} - \nabla \cdot \mathbf{q} = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}, \quad \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot \rho e \mathbf{u} = \rho \frac{de}{dt}$$

(что будет использовано позднее), а, с другой стороны, равносильно уравнению внутренней энергии жидкого объема:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V^t} \rho e dV = \dot{e}_{V^t} = \int_{\partial V^t} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} - \int_{V^t} (\vec{\mathbf{p}} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) dV :$$

$$\blacktriangleleft \int_{V^t} \left(\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot \rho e \mathbf{u} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V^t} \rho e dV \quad \blacksquare$$

С другой стороны, имеем:

$$\vec{\mathbf{p}} = p_\mu \vec{\delta} - \mu \vec{\tau}.$$

◀ Действительно, как следствие пятого положения 3.5 и полученной ранее формулы для скорости деформации площади,

$$\mathbf{f} = \int_{\partial V^t} p_\mu d\mathbf{S} + \mu \frac{d}{dt} d\mathbf{S} = \int_{\partial V^t} (p_\mu \vec{\delta} - \mu \vec{\tau}) \cdot d\mathbf{S} \quad \blacksquare$$

Далее, как следствие четвертого и пятого положений 3.4 и 3.5, уравнение внутренней энергии включает диссипацию и коэффициенты вязкости и теплопроводности

$$\dot{e}_{V^t} = \int_{\partial V^t} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} + \int_{V^t} (-\mathcal{C}p_\mu + \mu \dot{\varepsilon} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) dV ,$$

$$\mathbf{q} = \kappa \nabla T , \quad \dot{\varepsilon} = (\vec{\tau} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} :$$

$$\blacktriangleleft -\vec{\mathbf{p}} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} = -p_\mu \vec{\delta} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu (\vec{\tau} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = -\mathcal{C}p_\mu + \mu \dot{\varepsilon} \quad \blacksquare$$

В силу доказанного ранее

$$\min_{\mathbf{u}} \dot{\varepsilon} \Big|_{\mathcal{C} \neq 0} = \frac{2}{3} \mathcal{C}^2 .$$

Следовательно,

$$\min_{\mathbf{u}} \dot{e}_{V^t} \Big|_{\mathbf{q} \cdot d\mathbf{S}|_{\partial V^t} = 0, \mathbf{g} = \mathbf{0}, \mathcal{C} \neq 0} = \int_{V^t} \left(-\mathcal{C}p_\mu + \frac{2\mu}{3} \mathcal{C}^2 \right) dV .$$

В силу шестого и седьмого положений 3.6 и 3.7

$$\min_{\mathbf{u}} \dot{\varepsilon} \Big|_{\mathcal{C} \neq 0} = - \int_{V^t} \mathcal{C} p_0 dV \quad u \quad p_0 = p .$$

Из тождества положения 3.7 следует тогда, что

$$\int_{V^t} \left(-C p_\mu + \frac{2\mu}{3} C^2 \right) dV = - \int_{V^t} C p dV,$$

что в силу допустимой неограниченной малости подвижного объема и несжимаемости возможно только при

$$p_\mu = p + \frac{2\mu}{3} C$$

(формула динамического давления), или

$$\vec{p} = \left(p + \frac{2\mu}{3} C \right) \vec{\delta} - \mu \vec{\tau}.$$

(формула напряжений).

4.5. Объемные силы и граничные потоки

В результате приходим к уравнениям равновесия массы, импульса и энергии произвольного конечного объема ΔV области течения V , с потоками указанных величин через его границу $\partial\Delta V$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho E \end{pmatrix} dV + \int_{\partial\Delta V} \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \vec{p} \\ \rho E \mathbf{u} + \vec{p} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q} \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Delta V} \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \mathbf{g} \\ 0 \end{pmatrix} dV,$$

(интегральная форма законов сохранения, или основные интегральные уравнения), где

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \quad E = \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + e, \quad \mathbf{q} = \kappa \nabla T, \quad T = \frac{e}{c_v},$$

$$\vec{p} = \left(p + \frac{2\mu}{3} C \right) \vec{\delta} - \mu \vec{\tau},$$

$$\vec{\delta} = \mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k}, \quad \vec{\tau} = \mathbf{i}\tau^x + \mathbf{j}\tau^y + \mathbf{k}\tau^z = \tau^x \mathbf{i} + \tau^y \mathbf{j} + \tau^z \mathbf{k},$$

$$C = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \tau^x = \nabla u + \mathbf{u}_x, \quad \tau^y = \nabla v + \mathbf{u}_y, \quad \tau^z = \nabla w + \mathbf{u}_z$$

и

$$\rho = \text{const} > 0$$

$$\text{или } \rho \neq \text{const} \text{ и } p = \sigma \rho e, \quad \sigma = \gamma - 1 > 0, \quad \gamma = c_p / c_v,$$

причем, как правило,

$$\kappa, \mu, c_p, c_v = \text{const} > 0.$$

Неизвестными соответствующих 5 скалярных уравнений в общей (сжимаемой) среде служат плотность ρ , три компоненты скорости u , v , w и внутренняя энергия e или давление p .

§5. Дифференциальные уравнения среды

5.1. Законы сохранения для жидкой частицы

Приведенная интегральная форма законов сохранения является центральной в математической гидродинамике. Например, она систематически используется при их прямом численном моделировании соответствующим *методом конечного объема*, предполагающем дискретизацию области течения V *расчетной сеткой* путем разбиения ее на многогранники ΔV , или *ячейки*, с последующим приближением объемных и поверхностных интегралов в пределах каждой ячейки их конечными суммами.

В силу теоремы Остроградского–Гаусса и леммы Дю Буа Реймонда интегральная форма представляет эквивалентную запись соответствующих *дифференциальных законов сохранения*

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho E \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \vec{\mathbf{p}} \\ \rho E \mathbf{u} + \vec{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \mathbf{g} \\ 0 \end{pmatrix}$$

справедливых в каждой внутренней точке области течения V , или, как, вероятно, отметил бы механик, *для каждой жидкой частицы*, а вычислитель добавил бы: *на бесконечно малой сетке*.

5.2. Уравнения неразрывности, импульсов и теплопроводности

Как мы уже видели (в разделе 4.4), в силу первого соотношения данной системы, уравнения неразрывности, которое может быть приведено к форме с полной производной,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{C}\rho = 0,$$

три ее следующих равенства сводятся к уравнению движения жидкой частицы,

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{p}} = \rho \mathbf{g},$$

а последнее пятое – к уравнению теплопроводности

$$\rho \frac{de}{dt} - \nabla \cdot \mathbf{q} = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}$$

Тогда после ряда дополнительных преобразований (приводимых ниже) свод законов сохранения (с постоянными коэффициентами вязкости и теплопроводности среды) принимает вид системы уравнений

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{C} = 0 \quad (\text{уравнение неразрывности}),$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla \left(p - \frac{\mu}{3} \mathbf{C} \right) = \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (\text{уравнение движения}),$$

$$\frac{de}{dt} + \mathbf{C} \frac{p}{\rho} = \frac{\kappa}{c_v \rho} \Delta e + \frac{\mu}{\rho} \dot{\delta} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{уравнение теплопроводности}),$$

$$\dot{\delta} = \boldsymbol{\omega}^2 + \frac{4}{3} \mathbf{C}^2 + 2 \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{C} \mathbf{u}) = \frac{2}{3} \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2$$

(точная диссипация энергии),

$$\mathbf{A}^2 = (u_x - v_y)^2 + (v_y - w_z)^2 + (w_z - u_x)^2,$$

$$\mathbf{B}^2 = (v_x + u_y)^2 + (w_y + v_z)^2 + (u_z + w_x)^2,$$

$$T = \frac{e}{c_v}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla,$$

где $\rho = \text{const} > 0$

или $\rho \neq \text{const}$ и $p = \sigma p e$, $\sigma = \gamma - 1 > 0$, $\gamma = c_p / c_v$,

$$\kappa, \mu, c_p, c_v = \text{const} > 0$$

(дифференциальная форма законов сохранения, или основные дифференциальные уравнения), которой мы и будем пользоваться в дальнейшем, ссылаясь, как и обычно, на постоянную χ как на коэффициент температуропроводности среды.

◀ Действительно, дивергенция дивектора деформаций может быть выражена простой формулой,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} &= \nabla \cdot \left((\nabla u + \mathbf{u}_x) \mathbf{i} + (\nabla v + \mathbf{u}_y) \mathbf{j} + (\nabla w + \mathbf{u}_z) \mathbf{k} \right) = \\ &= \nabla (u_x + v_y + w_z) + \mathbf{u}_{xx} + \mathbf{u}_{yy} + \mathbf{u}_{zz} = \nabla \mathcal{C} + \Delta \mathbf{u}, \end{aligned}$$

упрощающей запись плотности сил напряжений:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\mathbf{p}} &= \nabla \cdot \left(p + \frac{2\mu}{3} \mathcal{C} \right) \bar{\boldsymbol{\delta}} - \nabla \cdot \mu \bar{\boldsymbol{\tau}} = \nabla p + \frac{2\mu}{3} \nabla \mathcal{C} - \mu \nabla \mathcal{C} - \mu \Delta \mathbf{u} = \\ &= \nabla \left(p - \frac{\mu}{3} \mathcal{C} \right) - \mu \Delta \mathbf{u}. \end{aligned}$$

В уравнении теплопроводности имеем:

$$\begin{aligned} -\bar{\mathbf{p}} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} &= \mu \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} - \left(p + \frac{2\mu}{3} \mathcal{C} \right) \bar{\boldsymbol{\delta}} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} = \\ &= \mu \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(p + \frac{2\mu}{3} \mathcal{C} \right) \mathcal{C}, \quad \mathbf{q} = \kappa \nabla T = \frac{\kappa}{c_v} \nabla e. \end{aligned}$$

Доказательство завершают полученные ранее (в разделе 1.5) формулы для диссипаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $\dot{\boldsymbol{\delta}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u} = \dot{\boldsymbol{\delta}} + \frac{2}{3} \mathcal{C}^2 = \frac{2}{3} \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \frac{2}{3} \mathcal{C}^2 = \\ &= \boldsymbol{\omega}^2 + 2\mathcal{C}^2 + 2\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathcal{C} \mathbf{u}) \blacksquare \end{aligned}$$

5.3. Энтропия идеального газа

Остановимся на двух непосредственных следствиях основных дифференциальных уравнений, выявляющих характерные функции сжимаемой и несжимаемой сред: энтропию первой и энтропию второй.

Так, с учетом работы газа по расширению или сжатию, с плотностью мощности $\mathcal{C}p$, при известных значениях ρ_0 , e_0 , p_0 термодинамических функций ρ , e , p в какой-либо точке области течения в заданный момент времени, левая часть уравнения теплопроводности для нормального газа ($p = \sigma \rho e$) сводится к пропорции полной производной его энтропии

$$s = \ln \frac{e \rho_0^\sigma}{e_0 \rho^\sigma} = \ln \frac{p \rho_0^\gamma}{p_0 \rho^\gamma}, \quad p = \sigma \rho e, \quad \sigma = \gamma - 1,$$

$$\rho e \frac{ds}{dt} = \rho \frac{de}{dt} + \mathcal{C}p = \rho \frac{de}{dt} - \sigma \frac{d\rho}{dt} e = \frac{\chi}{\rho} \Delta e + \frac{\mu}{\rho} \dot{\delta} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}.$$

Как следствие, в пренебрежении теплопроводностью ($\chi = 0$), вязкостью ($\mu = 0$) и внешними силами ($\mathbf{g} = \mathbf{0}$) энтропия соответствующей нормальной идеальной свободной сжимаемой среды сохраняется на траектории движения жидкой частицы, определяя здесь характерную адиабату, с показателем γ , для степенной зависимости давления от плотности:

$$p(t, \mathbf{r}^t) = \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma(t, \mathbf{r}^t), \quad p_0 = p(t_0, \mathbf{r}^{t_0}), \quad \rho_0 = \rho(t_0, \mathbf{r}^{t_0}),$$

$$\mathbf{r}^t = \mathbf{r}^{t_0} + \int_{t_0}^t \mathbf{u}(t', \mathbf{r}^{t'}) dt' \quad (\chi = \mu = 0, \mathbf{g} = \mathbf{0}).$$

5.4. Энтрофия несжимаемой жидкости

Скалярным квадратом завихренности $\boldsymbol{\omega}^2$, или *энтрофией*, выявляется механизм перехода механической энергии сплошной среды в тепловое движение ее молекул.

Этот механизм наиболее заметен в приближении несжимаемой жидкости, где по определению плотность постоянна, $\rho = const$, и в силу уравнения неразрывности сжимаемость $\mathbf{C} = 0$.

Переписанное для температуры T уравнение теплопроводности при незначительном влиянии внешних сил ($\mathbf{g} = \mathbf{0}$),

$$c_v \rho \frac{dT}{dt} = \kappa \Delta T + \mu \dot{\delta}, \quad \dot{\delta} = \boldsymbol{\omega}^2 + 2\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{C} \mathbf{u})$$

$$(\rho = const, \mathbf{C} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0),$$

или

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \mu \boldsymbol{\omega}^2 + \nabla \cdot (\kappa \nabla T - c_v \rho T \mathbf{u} + 2\mu \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$$

$$(\Delta T = \nabla \cdot \nabla T, \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot T \mathbf{u}),$$

после интегрирования по ограниченной области течения V ,

$$c_v \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_V T dV = \mu \int_V \boldsymbol{\omega}^2 dV + \int_{\partial V} (\kappa \nabla T - c_v \rho T \mathbf{u} + 2\mu \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S},$$

и выявляет энтрофию в качестве главного источника внутреннего тепла.

Этот источник оказывается единственным, если область V изолирована в том смысле, что обладает *липкой* ($\mathbf{u}|_{\partial V} = \mathbf{0}$) и *адиабатической* ($\nabla T \cdot d\mathbf{S}|_{\partial V} = 0$) границей ∂V .

При относительно малых размерах области V нагревание также можно считать происходящем равномерно. В этом случае получаем, что *однородная температура несжимаемой жидкости, нагреваемой*

вихревым движением в изолированном объеме, увеличивается со скоростью, пропорциональной средней энстрофии:

$$T'(t) = \frac{\mu}{c_v \rho} \overline{\omega^2}, \quad \overline{\omega^2} = \frac{1}{\int_V dV} \int_V \omega^2 dV.$$

В свою очередь естественно предположить, что сама величина *интенсивности перемешивания*, измеряемая средней энстрофией, пропорциональна мощности приложенных сил перемешивания, т.е. их механической работе, совершаемой в единицу времени. Открытием же постоянства отношения количества совершенной работы к увеличению температуры Джоулем и был обнаружен механический эквивалент тепла c_v в опытах по перемешиванию воды вращающимися решетками в замкнутом латунном сосуде (Рисунок 4).

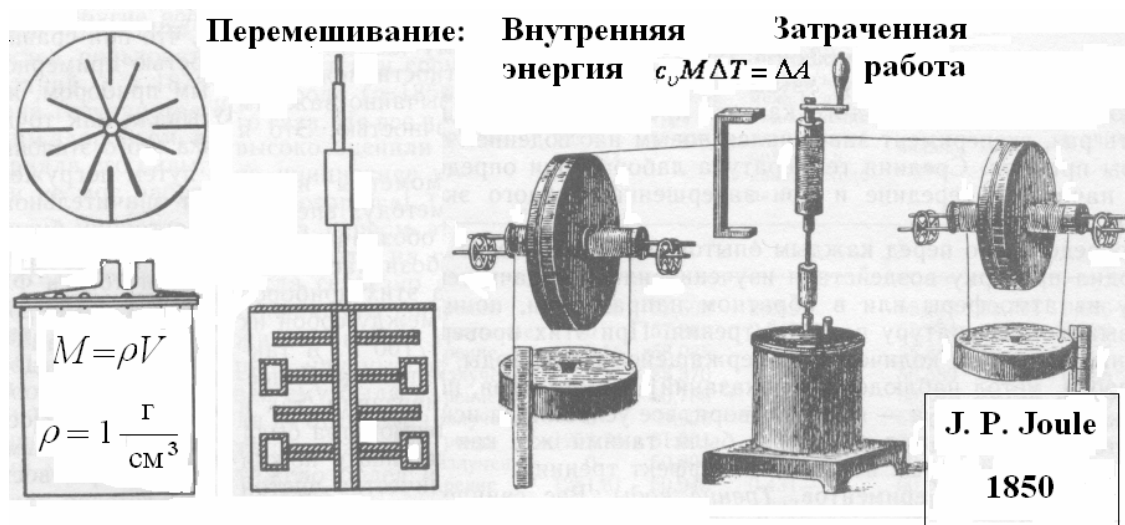


Рисунок 4 – Опытная установка Джоуля по измерению механического эквивалента тепла в теплоизолированном сосуде путем перемешивания воды с помощью решеток, вращаемых опускаемыми грузами.

§6. Классические формы уравнений несжимаемой среды

6.1. Уравнения Навье

Исследования математической гидродинамики, касающиеся вихревых течений, по существу и сводятся к анализу механизма реализации законов сохранения в последовательности гидродинамических неустойчивостей, начиная от простейшего, невозмущенного, или основного течения, и заканчивая турбулентным перемешиванием, как в упомянутых опытах Джоуля по измерению механического эквивалента тепла.

Наиболее близким к описанию этого механизма представляется приближение несжимаемой среды для удельного (отнесенного к постоянной плотности) давления P и трех компонент скорости, с постоянным коэффициентом кинематической вязкости среды ν , так называемыми *уравнениями Навье*:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla P = \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$P = \frac{p}{\rho}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad \rho, \mu = \text{const} > 0.$$

Этим приближением мы и ограничимся в дальнейшем.

По найденному в уравнениях Навье полю скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x, y, z)$ температура T определится решением *линейного уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\kappa}{c_v \rho} \Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = Q(t, x, y, z)$$

с гидродинамическим источником тепла

$$Q = \frac{\mu \dot{\delta}}{c_v \rho} - \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}}{c_v}, \quad \text{где } \dot{\delta} = \boldsymbol{\omega}^2 + 2\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \frac{2}{3} \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2,$$

$$\mathbf{A}^2 = (u_x - v_y)^2 + (v_y - w_z)^2 + (w_z - u_x)^2,$$

$$\mathbf{B}^2 = (v_x + u_y)^2 + (w_y + v_z)^2 + (u_z + w_x)^2,$$

$$\kappa, c_v = \text{const} > 0.$$

6.2. Основные течения

Векторное поле $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x, y, z)$ назовем *простым течением*, если оно одновременно удовлетворяет уравнениям Эйлера без внешних сил,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla P_e = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

и *стационарным уравнениям Стокса*, с заданным полем внешних ускорений,

$$-v\Delta \mathbf{u} + \nabla P_s = \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Как очевидно, всякое основное течение удовлетворяет уравнениям Навье с определенным с точностью до произвольной функции времени давлением

$$P = P_e + P_s:$$

$$\blacktriangleleft \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - (v\Delta \mathbf{u} + \mathbf{g}) = -\nabla (P_e + P_s) \blacksquare$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что исследуемые на предмет устойчивости классические *основные стационарные течения* (Гагена–Пуазейля, Куэтта, Колмогорова и другие) *оказываются простыми* (в указанном точном смысле).

6.3. Форма Громеки–Лэмба

Напомним известную формулу векторного анализа:

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} :$$

$$\blacktriangleleft \quad \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{u}=\text{const}} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} ,$$

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\text{const}} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} ,$$

$$\nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{u}=\text{const}} + \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=\text{const}} = \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \quad \blacksquare$$

Как следствие ее, конвективное ускорение представляется гидродинамическим аналогом силы Жуковского,

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla \frac{\mathbf{u}^2}{2}, \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u},$$

и, с помощью *интеграла Бернулли*

$$P_b \in P + \frac{\mathbf{u}^2}{2}$$

уравнения Навье переписываются *форме Громеки–Лэмба*:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla P_b = \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

6.4. Форма Гельмгольца–Фридмана

Приведем еще одну формулу векторного анализа:

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} .$$

◀ Действительно, непосредственно по формуле двойного векторного умножения имеем

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \Big|_{\mathbf{u}=\text{const}} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - \mathbf{u} (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}),$$

следовательно,

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \Big|_{\boldsymbol{\omega}=\text{const}} = -\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \Big|_{\boldsymbol{\omega}=\text{const}} = \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u},$$

и очевидное тождество

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \Big|_{\boldsymbol{\omega}=\text{const}} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \Big|_{\boldsymbol{\omega}=\text{const}}$$

заканчивает доказательство ■

В случае бездивергентных полей имеем:

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0,$$

и применение операции ротора $\nabla \times$ к обеим частям формы Громеки–Лэмба приводит к форме Гельмгольца–Фридмана для уравнений Навье:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nu \Delta \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{g},$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

6.5. Односвязные области течения

Форма Гельмгольца–Фридмана нуждается в пояснениях ввиду нетривиальности вопроса о градиентности гладкого векторного поля

$$\mathbf{h} = \mathbf{i}h^x + \mathbf{j}h^y + \mathbf{k}h^z = -\nabla P$$

при некотором потенциале $P = P(t, x, y, z)$, определенном всюду в заданной области V , где у поля отсутствует вихрь,

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{0},$$

$$\text{или } h_y^z - h_z^y = 0, \quad h_z^x - h_x^z = 0 \quad \text{и} \quad h_x^y - h_y^x = 0.$$

Он актуален как в общем случае, так и в рассматриваемой ситуации, где потенциалом служит удельное давление среды P , а полем \mathbf{h} – гидродинамическое ускорение (кратко, гидроускорение) вида

$$\mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{g}.$$

Прежде всего, по заданным значениям $P_0(t)$ в фиксированной внутренней или граничной точке \mathbf{r}_0 области V искомый потенциал P может быть определен локально, с помощью контурного интеграла,

$$P = P_0(t) - \int_{\Upsilon} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{r}, \quad P_0(t) = P(t, \mathbf{r}_0),$$

или

$$P(t, x, y, z) = P_0(t) - \int_{x_0}^x h^x(t, x', y_0, z_0) dx' - \\ - \int_{z_0}^z h^z(t, x, y_0, z') dz' - \int_{y_0}^y h^y(t, x, y', z) dy',$$

проходимого по отрезкам простейшей ломанной Υ , изображенной на Рисунке 5.

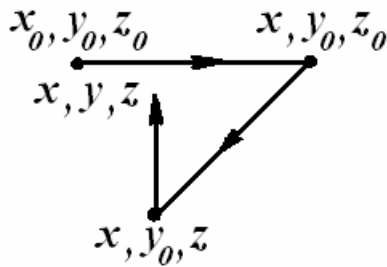


Рисунок 5 – Простейшая ломанная Υ контурного интеграла $\int_{\Upsilon} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{r} = P_0(t) - P$, используемого для нахождения локального потенциала P безвихревого векторного поля \mathbf{h} .

◀ Действительно, имеем:

$$P_x = -h^x(t, x, y_0, z_0) - \int_{z_0}^z h_x^z(t, x, y_0, z') dz' - \int_{y_0}^y h_x^y(t, x, y', z) dy' = \\ = -h^x(t, x, y_0, z_0) - \int_{z_0}^z h_z^x(t, x, y_0, z') dz' - \int_{y_0}^y h_y^x(t, x, y', z) dy' =$$

$$= -h^x(t, x, y_0, z_0) - h^x(t, x, y_0, z) + h^x(t, x, y_0, z_0) - \\ -h^x(t, x, y, z) + h^x(t, x, y_0, z) = -h^x(t, x, y, z), \dots \blacksquare$$

Желая продолжить формулу вычисления потенциала с помощью контурного интеграла на произвольную точку области V течения, мы можем соединить ее с фиксированной точкой некоторой новой простой (без точек самопересечения) ломанной Υ из конечного числа звеньев (следствие определения области как открытого связного множества пространства) и приблизить каждое ее малое звено с необходимой точностью простейшими ломанными из трех указанных выше звеньев.

Но при этом мы должны быть уверены в том, что два таких пути Υ и Υ' не приведут к различным значениям их контурных интегралов, или, что равносильно, взятый по составляемому ими в сумме циклу (простой замкнутой кривой) тот контурный интеграл не обратится в нуль.

Как и в случае плоскости, разбиваемой на треугольники, так и в случае пространства, разбиваемого на тетраэдры, при достаточной мелкости последних фиксированную точку можно соединить с варьируемой точкой простой ломанной из ребер тетраэдров. Тогда, как в двумерном случае (подробно рассматриваемом в классических курсах теории функций), можно показать, что и в рассматриваемом здесь трехмерном случае *условие однозначности определения потенциала через контурный интеграл бездивергентного поля равносильно односвязности области его задания*, т.е. возможности стягивания произвольного простого замкнутого цикла данной области в точку, не выходя за ее пределы, или, что равносильно, существованию ограничиваемой таким циклом поверхности, лежащей в замыкании рассматриваемой области течения.

Опуская необходимые подробности сформулированного (и интуитивно очевидного) утверждения, обратимся к его

непосредственному следствию, ограничивающему возможности рассматриваемой формы уравнений Навье: *использование формы Гельмгольца–Фридмана корректно по меньшей мере в односвязной области пространства.*

Например, – в сферическом слое (Рисунок 6).

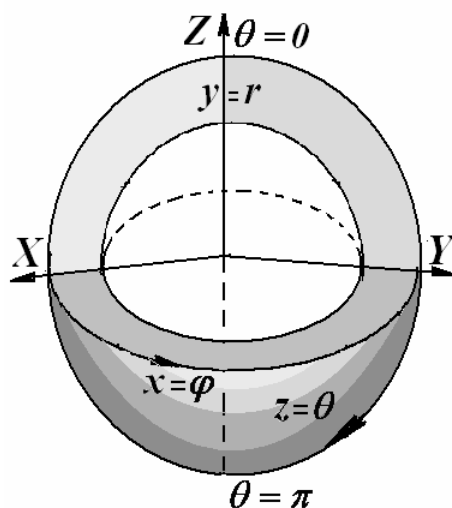


Рисунок 6 – Односвязная область сферического слоя.

Попытка же представить сферический слой периодическим слоем является ошибкой: общий периодический слой не является односвязной областью.

Однако, забегаая вперед, отметим, что и в данной области течения, не являющейся односвязной, форма Гельмгольца–Фридмана остается равносильной уравнениям Навье, или, более обще, безвихревое поле – градиентным. Только потенциал последнего будет вычисляться уже не с помощью контурного интеграла, а другим способом.

Иначе говоря, традиционное условие односвязности области при вычислении потенциала оказывается обычным ограничением, зависящем от выбранного способа вычисления потенциала.

Переходим к рассмотрению пространственного периодического слоя сплошной среды.

Часть 3. Течения в периодическом слое

§7. Источники и потенциалы слоя

7.1. Зональные переменные и операции

В координатном гексаэдре

$$V = \{0 < x < l, 0 < y < h, 0 < z < d\}$$

высоты h , ширины d и длины l выделим соответствующие *вертикальное, поперечное* и *продольное* направления $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$, и $x\mathbf{i}$. (Рисунок 7). Прилагательное «зональный» при этом условимся относить как к двум последним из них, так и к связанным с ними функциям и операциям.

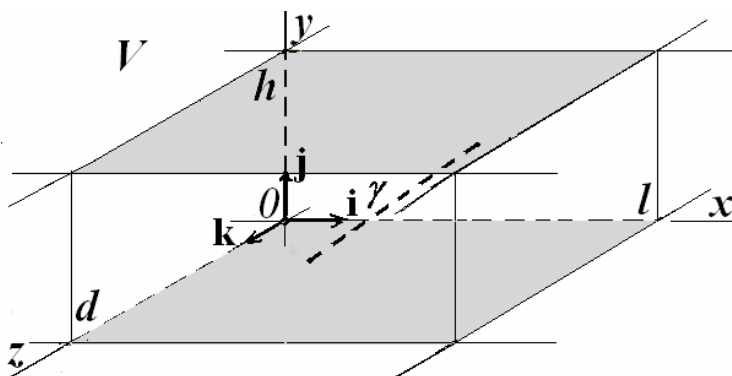


Рисунок 7 – Гексаэдр V с выделенными осями координат – вертикальной, $y\mathbf{j}$, и зональными – поперечной, $z\mathbf{k}$, и продольной $x\mathbf{i}$.

Для определенной в замыкании гексаэдра V и, быть может, зависящей от времени $t \geq 0$, непрерывной вещественной функции

$\varphi = \varphi(t, x, y, z)$ определим координатные балансы $[\varphi]^{z,x}$ и средние $\langle \varphi \rangle^{z,x}$,

$$[\varphi]^z = \varphi|_0^d, \quad [\varphi]^x = \varphi|_0^l, \quad \text{или} \quad [\varphi] = [\varphi]^z \mathbf{k} + [\varphi]^x \mathbf{i},$$

$$\langle \varphi \rangle^z = \frac{1}{d} \int_0^d \varphi dz \quad \text{и} \quad \langle \varphi \rangle^x = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi dx,$$

а также зональные среднее $\langle \varphi \rangle$ и пульсацию φ' ,

$$\langle \varphi \rangle = \langle \varphi \rangle(t, y) = \langle \langle \varphi \rangle^x \rangle^z = \langle \langle \varphi \rangle^z \rangle^x = \frac{1}{dl} \int_0^d \int_0^l \varphi(t, x, y, z) dz dx,$$

$$\text{и} \quad \varphi' = \varphi - \langle \varphi \rangle, \quad \langle \varphi' \rangle = \langle \varphi \rangle - \langle \langle \varphi \rangle \rangle = \langle \varphi \rangle - \langle \varphi \rangle = 0.$$

Точкой сверху условимся отмечать зональные градиент $\nabla \&$ и лапласиан $\Delta \&$:

$$\nabla \& = \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{и} \quad \Delta \& = \nabla \& \cdot \nabla \& = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

На двукратно непрерывно дифференцируемую функцию φ , гармоническую по зональным переменным z и x ,

$$\Delta \& \varphi = 0 \quad \text{всюду в } V.$$

при этом естественно ссылаться как на зонально гармоническую функцию.

7.2. Первый признак среднего

Для непрерывной в замыкании гексаэдра V и двукратно непрерывно дифференцируемой в его внутренних точках вещественной функции $\varphi = \varphi(t, x, y, z)$, с непрерывно продолжаемыми на свои боковые грани $z = 0, d$ и $x = 0, l$ нормальными производными φ_z и φ_x , соответственно, следующие

условия (i) зональной гармоничности функции φ внутри области V , (ii) периодичности функции φ на указанных боковых гранях и (iii) периодичности ее нормальных производных φ_z и φ_x на своих боковых гранях влекут совпадение данной функции со своим зональным средним:

$$\dot{\Delta}\varphi = 0 \text{ в } V, \quad [\varphi] = 0 \text{ и } [\varphi_z]^z = [\varphi_x]^x = 0$$

влекут $\varphi = \langle \varphi \rangle$

(первый признак среднего)

◀ Действительно, имеем:

$$[\varphi\varphi_z]^z = \varphi[\varphi_z]^z = 0, \quad [\varphi\varphi_x]^x = \varphi[\varphi_x]^x = 0,$$

$$dl \langle (\varphi\varphi_z)_z + (\varphi\varphi_x)_x \rangle = l \langle [\varphi\varphi_z]^z \rangle^x + d \langle [\varphi\varphi_x]^x \rangle^z = 0,$$

$$\langle \varphi_z^2 + \varphi_x^2 \rangle = \langle (\varphi\varphi_z)_z + (\varphi\varphi_x)_x \rangle - \langle \varphi\dot{\Delta}\varphi \rangle = 0,$$

следовательно, $\varphi_z = \varphi_x = 0$, а значит $\varphi = \varphi(t, y) = \langle \varphi \rangle$ ■

7.3. Первый признак нуля

При выполненных условиях предыдущего утверждения справедлив *первый признак нуля*:

$$\dot{\Delta}\varphi = 0 \text{ в } V, \quad [\varphi] = 0, \quad [\varphi_z]^z = [\varphi_x]^x = 0 \text{ и } \langle \varphi \rangle = 0$$

влекут $\varphi = 0$.

Последний следует непосредственно из первого признака среднего.

Отметим существенность требования *периодичности нормальных производных* для признаков среднего и нуля:

$$\dot{\Delta}\varphi = 0, \quad [\varphi] = 0 \text{ и } \langle \varphi \rangle = 0 \text{ для}$$

$$\varphi = z(d - z) - x(l - x) - \frac{1}{6}(d^3 - l^3),$$

$$\varphi_z|_{z=0} = d, \quad \varphi_z|_{z=d} = -d, \quad \varphi_x|_{x=0} = l, \quad \varphi_x|_{x=l} = -l.$$

7.4. Второй признак среднего

Для пары непрерывных в замыкании гексаэдра V и непрерывно дифференцируемой в его внутренних точках вещественных функций $\varphi = \varphi(t, x, y, z)$ и $\psi = \psi(t, x, y, z)$, с непрерывной смешанной производной $\varphi_{zx} = \varphi_{xz}$ и непрерывно продолжаемыми на соответствующие боковые грани $z = 0, d$ и $x = 0, l$ касательными производными φ_x и φ_z у первой из них, следующие условия (i) зональной гармоничной сопряженности функций φ и ψ внутри области V , (ii) периодичности второй функции ψ на указанных боковых гранях и (iii) периодичности касательных производных первой функции, φ_x и φ_z , на своих боковых гранях влекут совпадение данной функции со своим зональным средним:

$$\varphi_z + \psi_x = 0, \quad \varphi_x - \psi_z = 0, \quad \varphi_{xz} = \varphi_{zx} \quad \text{в } V,$$

$$[\psi] = 0 \quad \text{и} \quad [\varphi_x]^z = [\varphi_z]^x = 0$$

$$\text{влекут} \quad \varphi = \langle \varphi \rangle \quad \text{и} \quad \psi = \langle \psi \rangle$$

(второй признак среднего).

◀ Действительно, имеем:

$$\varphi_z^2 + \varphi_x^2 = \psi_z \varphi_x - \psi_x \varphi_z = (\psi \varphi_x)_z - (\psi \varphi_z)_x + \psi (\varphi_{xz} - \varphi_{zx}),$$

и, следовательно,

$$\langle \varphi_z^2 + \varphi_x^2 \rangle = [\psi \varphi_x]^z - [\psi \varphi_z]^x = 0,$$

а значит $\psi_z = \varphi_x = 0$ и $\psi_x = -\varphi_z = 0$, что влечет $\varphi = \varphi(t, y) = \langle \varphi \rangle$
и $\psi = \psi(t, y) = \langle \psi \rangle$ ■

7.5. Второй признак нуля

При выполненных условиях предыдущего утверждения справедлив *второй признак нуля*:

$$\begin{aligned} \varphi_z + \psi_x = 0, \quad \varphi_x - \psi_z = 0, \quad \varphi_{xz} = \varphi_{zx} \quad \text{в } V, \\ [\psi] = 0, \quad [\varphi_x]^z = [\varphi_z]^x = 0 \quad \text{и} \quad \langle \varphi \rangle = \langle \psi \rangle = 0 \\ \text{влекут} \quad \varphi = \psi = 0. \end{aligned}$$

Последний следует непосредственно из второго признака среднего.

7.6. Оператор обратного источника

Гладкая (бесконечно дифференцируемую) функция φ в замыкании гексаэдра V по определению *зонально периодична*, если вместе с производными всех порядков она периодична на его боковых гранях $z = 0, d$ и $x = 0, l$.

Среди зонально периодичных функций по заданному среднему f найдем *зональный потенциал* φ источника g , как решение граничной задачи вида:

$$-\Delta \varphi = g(t, x, y, z), \quad \langle g \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle \varphi \rangle = f(t, y) \quad \text{в } V.$$

По признаку нуля решение данной линейной задачи единственно: $f = g = 0$ влечет $\varphi = 0$, что будет справедливо, очевидно, также и для разности потенциалов от одного источника g и среднего f .

Решение поставленной задачи получим последовательными одномерными Фурье–разложениями источника по стандартным модам:

$$\vartheta_0^m = \cos \frac{m\alpha}{d}, \quad \vartheta_0^m = \sin \frac{m\alpha}{d}, \quad \hat{c}^n = \cos \hat{n}x, \quad \hat{s}^n = \sin \hat{n}x,$$

$$\frac{m\alpha}{d} = \frac{2\pi}{d}m, \quad \hat{n} = \frac{2\pi}{l}n, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Имеем:

$$g = \langle g \rangle^z + 2 \sum_{m>0} \langle g \tilde{c}^m \rangle^z \tilde{c}^m + \langle g \tilde{s}^m \rangle^z \tilde{s}^m,$$

$$\langle g \rangle^z = \left\langle \left\langle g \right\rangle^z \right\rangle^x + 2 \sum_{n>0} \left\langle \left\langle g \hat{c}^n \right\rangle^z \right\rangle^x \hat{c}^n + \left\langle \left\langle g \hat{s}^n \right\rangle^z \right\rangle^x \hat{s}^n =$$

$$= \langle g \rangle + 2 \sum_{n>0} \langle g \hat{c}^n \rangle \hat{c}^n + \langle g \hat{s}^n \rangle \hat{s}^n \quad u \quad \langle g \rangle = 0.$$

Аналогично,

$$\langle g \tilde{c}^m \rangle^z = \langle g \tilde{c}^m \rangle + 2 \sum_{n>0} \langle g \tilde{c}^m \hat{c}^n \rangle \hat{c}^n + \langle g \tilde{c}^m \hat{s}^n \rangle \hat{s}^n$$

$$u \quad \langle g \tilde{s}^m \rangle^z = \langle g \tilde{s}^m \rangle + 2 \sum_{n>0} \langle g \tilde{s}^m \hat{c}^n \rangle \hat{c}^n + \langle g \tilde{s}^m \hat{s}^n \rangle \hat{s}^n.$$

Следовательно,

$$g = 2 \sum_{m>0} \tilde{g}_m^c \tilde{c}^m + \tilde{g}_m^s \tilde{s}^m + 2 \sum_{n>0} \hat{g}_n^c \hat{c}^n + \hat{g}_n^s \hat{s}^n +$$

$$+ 4 \sum_{m,n>0} g_{mn}^{cc} \tilde{c}^m \hat{c}^n + g_{mn}^{cs} \tilde{c}^m \hat{s}^n + g_{mn}^{sc} \tilde{s}^m \hat{c}^n + g_{mn}^{ss} \tilde{s}^m \hat{s}^n,$$

где

$$\hat{g}_n^c = \langle g \hat{c}^n \rangle, \quad \hat{g}_n^s = \langle g \hat{s}^n \rangle, \quad \tilde{g}_m^c = \langle g \tilde{c}^m \rangle, \quad \tilde{g}_m^s = \langle g \tilde{s}^m \rangle,$$

$$g_{mn}^{cc} = \langle g \tilde{c}^m \hat{c}^n \rangle, \quad g_{mn}^{cs} = \langle g \tilde{c}^m \hat{s}^n \rangle,$$

$$g_{mn}^{sc} = \langle g \tilde{s}^m \hat{c}^n \rangle, \quad g_{mn}^{ss} = \langle g \tilde{s}^m \hat{s}^n \rangle.$$

Приближая источник и потенциал конечными суммами Фурье, приходим к искомому решению:

$$\varphi = f(t, y) + Tg,$$

где

$$Tg = 2 \sum_{m>0} \frac{\tilde{g}_m^c \tilde{c}^m + \tilde{g}_m^s \tilde{s}^m}{\tilde{m}^2} + 2 \sum_{n>0} \frac{\hat{g}_n^c \hat{c}^n + \hat{g}_n^s \hat{s}^n}{\hat{n}^2} +$$

$$+ 4 \sum_{m,n>0} \frac{g_{mn}^{cc} \tilde{c}^m \hat{c}^n + g_{mn}^{cs} \tilde{c}^m \hat{s}^n + g_{mn}^{sc} \tilde{s}^m \hat{c}^n + g_{mn}^{ss} \tilde{s}^m \hat{s}^n}{\tilde{m}^2 + \hat{n}^2}$$

– решение исходной задачи с нулевым средним:

$$-\dot{\Delta}\varphi = g \quad \text{и} \quad \langle \varphi \rangle = \langle g \rangle = 0 \quad \text{в} \quad V.$$

Как и обычно, при переходе от конечных сумм Фурье к их ряду Tg , гладкость последнего обеспечивается гладкостью источника g , его периодичностью, а значит и возможностью неограниченного интегрирования по частям его коэффициентов, что обеспечивает необходимое повышения порядка сходимости этих сумм:

$$\langle g \hat{c}^n \rangle^x = \frac{1}{l \hat{n}} \int_0^l g dx \sin \hat{n}x = -\frac{1}{l \hat{n}} \int_0^l g_x \sin \hat{n}x dx,$$

$$\text{влечет} \quad \hat{g}_n^s = \left\langle \left\langle g \hat{c}^n \right\rangle^x \right\rangle^z = -\frac{1}{\hat{n}} \hat{g}_{xn}^s = -\frac{1}{\hat{n}^2} \hat{g}_{xxn}^s = \dots,$$

$$\text{и} \quad \left\langle g \dot{\Delta}(\tilde{c}^m \hat{c}^n) \right\rangle = \left\langle (\dot{\Delta}g) \tilde{c}^m \hat{c}^n \right\rangle,$$

$$\text{влечет} \quad g_{mn}^{cc} = -\frac{1}{\tilde{m}^2 + \hat{n}^2} (\dot{\Delta}g)_{mn}^{cc}, \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом, если трактовать сужение операции $-\dot{\Delta}$ на линейном многообразии зональных пульсаций φ , g , ... как оператор $-\dot{\Delta}: \varphi \rightarrow g$, производящий источник $g = -\dot{\Delta}\varphi$ из потенциала φ , или оператор источника, или, кратко, просто *источник*, то определяемую решением последней задачи для пульсации φ операцию $T: g \rightarrow \varphi$,

восстанавливающую потенциал φ источника g , естественно рассматривать как оператор *обратного источника*.

В действительности T является *правым* обратным оператором источника $-\dot{\Delta}$ в пространстве зональных пульсаций.

Кроме того, как очевидно, при своем непосредственном *расширении* на множество произвольных гладких зонально периодических функций ψ он обнаруживает следующие свойства:

$$T(\psi_{x,y,z}) = (T\psi)_{x,y,z}, \quad \text{в частности, } (T\psi_z)_x = (T\psi_x)_z$$

(перестановочность с дифференцированием);

$$T\dot{\Delta}\psi = \dot{\Delta}T\psi = (T\psi_z)_z + (T\psi_x)_x = \langle \psi \rangle - \psi$$

(обращение лапласиана слева).

На многообразии пульсаций ($\langle \psi \rangle = 0$) последнее свойство говорит о том, данный *правый* обратный оператор T одновременно является *левым* обратным оператором источника $-\dot{\Delta}$.

§8. Абс–теорема о разложении

8.1. Векторный периодический слой

Под *векторным* периодическим слоем, в дальнейшем, просто *слоем*, будем подразумевать линейное многообразие векторных полей $\mathbf{h} = \mathbf{i}h^x + \mathbf{j}h^y + \mathbf{k}h^z$, с компонентами $h^{x,y,z}$ – гладкими зонально периодическими функциями.

Периодический слой получается, таким образом, отождествлением двух пар противоположенных боковых граней $z = 0, d$ и $x = 0, l$ гексаэдра V для векторных полей и представляет собой область пространства, гомеоморфную заключенной между двумя *коаксиальными* (с общим центральным циклом) торроидальными поверхностями (Рисунок 8)

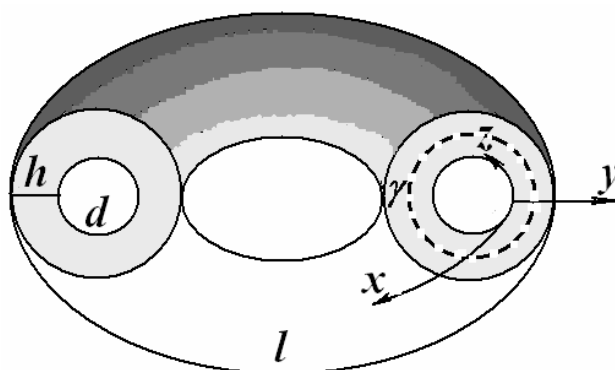


Рисунок 8 – Периодический слой, полученный отождествлением боковых граней $z = 0, d$ и $x = 0, l$ гексаэдра V , изображенного на Рисунке 7.

8.2. Структурные потенциалы и поля

Гладкие зонально периодические пульсации слоя a , b и c ,

$$\langle \varphi \rangle = 0, \quad \varphi(t, x+l, y, z) = \varphi(t, x, y, z) = \varphi(t, x, y, z+d),$$

для $\varphi = a, b, c$, включая производные,

$$\text{при } t \geq 0, \quad -\infty < x, z < \infty,$$

условимся относить соответственно к *первому*, *второму* и *третьему* структурными потенциалам периодического слоя, если с помощью указанных функций определяются следующие векторные поля периодического слоя, на которые мы будем ссылаться как на его *структурные поля*, или, кратко, *структуры*.

Рулон \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times a\mathbf{j}) = \nabla \nabla \cdot a\mathbf{j} - \mathbf{j} \Delta a = \mathbf{i} a_{,yx} - \mathbf{j} \dot{\Delta} a + \mathbf{k} a_{,yz}.$$

Циклон \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = \nabla \times b\mathbf{j} = -\mathbf{i} b_z + \mathbf{k} b_x.$$

Фронт \mathbf{c} :

$$\mathbf{c} = \mathbf{j} \times (\mathbf{j} \times \nabla c) = -\mathbf{i} c_x - \mathbf{k} c_z.$$

Как очевидно, структуры являются пульсациями:

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \mathbf{i} \langle a_{,yx} \rangle - \mathbf{j} \langle \dot{\Delta} a \rangle + \mathbf{k} \langle a_{,yz} \rangle = \mathbf{0},$$

$$\langle \mathbf{b} \rangle = -\mathbf{i} \langle b_z \rangle + \mathbf{k} \langle b_x \rangle = \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{c} \rangle = -\mathbf{i} \langle c_x \rangle - \mathbf{k} \langle c_z \rangle = \mathbf{0}.$$

Отметим также, что в каждой зональной плоскости $y = \text{const}$ (плоскости зональных переменных z и x) циклоном \mathbf{b} и фронтом \mathbf{c} служат соленоидальное и градиентное поля, определяемые функцией тока b и потенциалом c , соответственно.

Рулоном служит соленоидальное поле, с зональными потенциалом $-a_y$ и источником $-\dot{\Delta} a$.

Отметим линейную независимость структур \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} :

при $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ и $\alpha, \beta, \gamma = \text{const}$

тождество $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}$ в V

влечет $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

◀ Действительно, скалярно умножив данное тождество на \mathbf{j} , получим, с учетом $\mathbf{j} \cdot \mathbf{b} = 0$ и $\mathbf{j} \cdot \mathbf{c} = 0$, что $\mathbf{j} \cdot \mathbf{a} = -\alpha \dot{\Delta} a = 0$ в V . При $\langle a \rangle = 0$ последнее возможно только для $\alpha = 0$ (поскольку в противном $\dot{\Delta} a = 0$ в V , что по первому признаку нуля равносильно $a = 0$, а значит противоречит условию $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$). Оставшееся равенство $\beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}$ приводит к тождествам $\varphi_z + \psi_x = 0$ и $\varphi_x - \psi_z = 0$ для зональных пульсаций $\varphi = \beta b$ и $\psi = \gamma c$ в V ($\langle \varphi \rangle = \langle \psi \rangle = 0$). По второму признаку нуля $\varphi = \beta b = 0$ и $\psi = \gamma c = 0$, что снова возможно только при $\beta = 0$ и $\gamma = 0$ (в противном $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ или $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, соответственно) ■

8.3. Лемма о составляющих источника

Покажем, что сумма рулона, циклона и фронта со структурными потенциалами

$$A = \mathbf{j} \cdot \mathbf{f}, \quad B = \mathbf{j} \cdot \nabla \times \mathbf{f} \quad \text{и} \quad C = \nabla \cdot \mathbf{f}$$

соответственно, составляет зональный источник $-\dot{\Delta} \mathbf{f}$ любого двукратно непрерывно дифференцируемого векторного поля \mathbf{f} в любой точке пространства:

$$\nabla \times (\nabla \times A \mathbf{j}) + \nabla \times B \mathbf{j} + \mathbf{j} \times (\mathbf{j} \times \nabla C) = -\dot{\Delta} \mathbf{f}.$$

Иначе говоря, справедливо тождество:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{f} \mathbf{j}) + \nabla \times (\mathbf{j} \cdot \nabla \times \mathbf{f}) \mathbf{j} + \mathbf{j} \times (\mathbf{j} \times \nabla \nabla \cdot \mathbf{f}) = -\dot{\Delta} \mathbf{f}$$

(лемма о составляющих источника).

◀ Действительно, заметив, что

$$A = f^y, \quad B = f_z^x - f_x^z \quad u \quad C = f_x^x + f_y^y + f_z^z,$$

находим:

$$\nabla \times (\nabla \times A \mathbf{j}) = \mathbf{i} A_{yx} - \mathbf{j} \dot{\Delta} A + \mathbf{k} A_{yz}, \quad \nabla \times B \mathbf{j} = \mathbf{k} B_x - \mathbf{i} B_z$$

$$u \quad \mathbf{j} \times (\mathbf{j} \times \nabla C) = -\mathbf{i} C_x - \mathbf{k} C_z, \quad \text{где} \quad A = f^y.$$

Закключаем:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{j} \cdot \mathbf{f}) \mathbf{j}) + \nabla \times ((\mathbf{j} \cdot \nabla \times \mathbf{f}) \mathbf{j}) + \mathbf{j} \times (\mathbf{j} \times \nabla \nabla \cdot \mathbf{f}) &= \\ &= \nabla \times (\nabla \times A \mathbf{j}) + \nabla \times B \mathbf{j} + \mathbf{j} \times (\mathbf{j} \times \nabla C) = \\ &= \mathbf{i} (A_{yx} - B_z - C_x) - \mathbf{j} \dot{\Delta} h^y + \mathbf{k} (A_{yz} + B_x - C_z), \end{aligned}$$

где

$$A_{yx} - B_z - C_x = f_{yx}^y - (f_z^x - f_x^z)_z - (f_x^x + f_y^y + f_z^z)_x = -\dot{\Delta} f^x$$

$$u \quad A_{yz} + B_x - C_z = f_{yz}^y + (f_z^x - f_x^z)_x - (f_x^x + f_y^y + f_z^z)_z = -\dot{\Delta} f^z \quad \blacksquare$$

8.4. Абс-разложение

Основным утверждением для слоя будет следующая *abc-теорема*:

Зональная пульсация $\mathbf{h} - \langle \mathbf{h} \rangle$ любого векторного поля \mathbf{h} периодического слоя разлагается в сумму рулона \mathbf{a} , циклона \mathbf{b} и фронта \mathbf{c} ,

$$\mathbf{h} - \langle \mathbf{h} \rangle = \mathbf{h}' = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c},$$

$$\mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times a \mathbf{j}), \quad \mathbf{b} = \nabla \times b \mathbf{j}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{j} \times (\mathbf{j} \times \nabla c)$$

(*abc-разложение*), структурные потенциалы которых, a , b и c однозначно определяются источниками вида:

$$-\dot{\Delta} a = \mathbf{j} \cdot \mathbf{h}', \quad -\dot{\Delta} b = \mathbf{j} \cdot \nabla \times \mathbf{h}' \quad u \quad -\dot{\Delta} c = \nabla \cdot \mathbf{h}',$$

$$\langle a \rangle = \langle b \rangle = \langle c \rangle = 0.$$

Существование потенциалов a, b, c устанавливается при помощи оператора обратного источника (как в разделе 7.6).

Далее, в силу леммы о составляющих источника имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \nabla \times \nabla \times \dot{\Delta}a\mathbf{j} + \nabla \times \dot{\Delta}b\mathbf{j} + \mathbf{j} \times (\mathbf{j} \times \nabla \dot{\Delta}c) = \\ &= -\nabla \times \nabla \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{h}'\mathbf{j} - \nabla \times (\mathbf{j} \cdot \nabla \times \mathbf{h}')\mathbf{j} - \mathbf{j} \times (\mathbf{j} \times \nabla \nabla \cdot \mathbf{h}') = \dot{\Delta}\mathbf{h}' \end{aligned}$$

Поскольку у слагаемых поля

$$\Phi = \mathbf{h}' - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{i}\Phi^x + \mathbf{j}\Phi^y + \mathbf{k}\Phi^z$$

нулевые средние значения,

$$\langle \mathbf{h}' \rangle = \langle \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{c} \rangle = \mathbf{0},$$

заключаем, что его компонентами служат зонально периодичные и гармоничные пульсации:

$$\dot{\Delta}\Phi^{x,y,z} = 0 \quad \text{и} \quad \langle \Phi^{x,y,z} \rangle = 0, \quad \text{включая производные.}$$

Тогда в силу первого признака нуля $\Phi = \mathbf{0}$ ■

§9. Приложения abc–теоремы

9.1. Зональный критерий градиента

Обратимся к следствиям *abc*-разложения. Для этого определим 4 скалярные *структурные вихря* поля \mathbf{h} .

Горизонтальную проекцию зонально среднего $\langle \nabla \times \mathbf{h} \rangle$ вектора завихренности $\nabla \times \mathbf{h}$ и ее координаты $\langle h_y^z - h_z^y \rangle = \langle h^z \rangle_y$ и $\langle h_x^y - h_y^x \rangle = -\langle h^x \rangle_y$ (вертикальная проекция $\langle h_z^x - h_x^z \rangle = 0$) отнесем к *вихрям нулевого порядка* (или к *нулевому вихрю*),

$$\mathbf{j} \times \langle \nabla \times \mathbf{h} \rangle \times \mathbf{j} \equiv \mathbf{j} \times (\langle \nabla \times \mathbf{h} \rangle \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \langle h^z \rangle_y - \mathbf{k} \langle h^x \rangle_y.$$

Вертикальную проекцию ротора $\nabla \times \mathbf{h}$ отнесем к *вихрю первого порядка* (или к *первому вихрю*),

$$\mathbf{j} \cdot \nabla \times \mathbf{h} = h_z^x - h_x^z.$$

Такую же проекцию повторного ротора отнесем к *вихрю второго порядка* (или ко *второму вихрю*),

$$\mathbf{j} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \mathbf{j} \cdot (\nabla \nabla \cdot \mathbf{h} - \Delta \mathbf{h}) = h_{xy}^x + h_{zy}^z - \dot{\Delta} h^y.$$

Покажем справедливость следующего *критерия градиента*, или условия представления поля градиентом:

Векторное поле \mathbf{h} периодического слоя градиентно,

$$\mathbf{h} = h^x \mathbf{i} + h^y \mathbf{j} + h^z \mathbf{k} = -\nabla P,$$

а именно обладает определенным с точностью до произвольной функции $P_{atm}(t)$, не зависящей от координат, и определяемым с

помощью оператора обратного источника T гладким и, вообще говоря не периодическим по зональным переменным, потенциалом

$$P = P_{atm}(t) - z \langle h^z \rangle - x \langle h^x \rangle - \int_0^y \langle h^y \rangle(t, y') dy' + Th_z^z + Th_x^x$$

тогда и только тогда, когда всюду внутри слоя вырождены его структурные вихри:

$$\langle \nabla \times \mathbf{h} \rangle = 0, \text{ или } \langle h^z \rangle_y = \langle h^x \rangle_y = 0,$$

$$\mathbf{j} \cdot \nabla \times \mathbf{h} = h_z^x - h_x^z = 0$$

$$\text{и } \mathbf{j} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = h_{zy}^z + h_{xy}^x - \Delta h^y = 0.$$

◀ Действительно, градиентность поля \mathbf{h} предполагает его нулевую завихренность $\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{0}$, а значит – вырожденность его структурных вихрей.

Обратно, в силу зональной периодичности \mathbf{h} имеем:

$$\langle \nabla \times \mathbf{h} \rangle = \langle \mathbf{j} \times \mathbf{h}_y \rangle = \mathbf{j} \times \langle \mathbf{h} \rangle_y = \mathbf{i} \langle h^z \rangle_y - \mathbf{k} \langle h^x \rangle_y.$$

Далее, с учетом рассмотренных в разделе 7.6 свойств оператора T получаем:

$$\begin{aligned} P_z &= -\langle h^z \rangle + Th_{zz}^z + Th_{xz}^x = -\langle h^z \rangle + T(h_{zz}^z + h_{xx}^z) + T(h_z^x - h_x^z)_x = \\ &= -\langle h^z \rangle + \langle h^z \rangle - h^z + T(h_z^x - h_x^z)_x = -h^z + T(\mathbf{j} \cdot \nabla \times \mathbf{h})_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_x &= -\langle h^x \rangle + Th_{zx}^z + Th_{xx}^x = -\langle h^x \rangle + T(h_x^z - h_z^x)_z + T(h_{zz}^x + h_{xx}^x) = \\ &= -\langle h^x \rangle - T(h_z^x - h_x^z)_z + \langle h^x \rangle - h^x = -h^x - T(\mathbf{j} \cdot \nabla \times \mathbf{h})_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_y &= -z \langle h^z \rangle_y - x \langle h^x \rangle_y - \langle h^y \rangle + T(h_{zy}^z + h_{xy}^x) = \\ &= -z \langle h^z \rangle_y - x \langle h^x \rangle_y - \langle h^y \rangle + T \Delta h^y + T(h_{zy}^z + h_{xy}^x - \Delta h^y) = \end{aligned}$$

$$= -h^y - z \left\langle h^z \right\rangle_y - x \left\langle h^x \right\rangle_y + T \mathbf{j} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}),$$

и обращение в нуль структурных вихрей всех порядков приводит к требуемой градиентности векторного поля \mathbf{h} ■

9.2. T-форма уравнений Навье

Критерием градиента для гидроускорения

$$\mathbf{h} = \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{g}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = u^x \mathbf{i} + u^y \mathbf{j} + u^z \mathbf{k},$$

с компонентами

$$h^{x,y,z} = \frac{\partial}{\partial t} u^{x,y,z} - \nu \Delta u^{x,y,z} + \mathbf{u} \cdot \nabla u^{x,y,z} - g^{x,y,z},$$

будет следующая *транспортная* (т.е. исключая давление, как интеграл) *форма* (или, кратко, *T-форма*) уравнений Навье в слое,

$$\left\langle h^z \right\rangle_y = \left\langle h^x \right\rangle_y = 0, \quad h_z^x - h_x^z = 0, \quad h_{zy}^z + h_{xy}^x - \dot{\Delta} h^y = 0,$$

$$u_x^x + u_y^y + u_z^z = 0,$$

заменяющая в рассматриваемом случае неодносвязной области течения используемую в случае односвязной области классическую транспортную форму Гельмгольца–Фридмана.

Задавшись необходимыми

(А) *внешним, или (атмосферным) давлением* $P_{atm}(t)$,

(Б) *создаваемыми извне средними перепадами* $\sigma^{z,x}(t)$

внутреннего давления P на периодах слоя,

(В) *сообщаемой слою в целом вертикальной скоростью* $V(t)$,

$$-\left\langle P_{z,x} \right\rangle = \left\langle h^{z,x} \right\rangle = \sigma^{z,x}(t) \quad (\left\langle h^{z,x} \right\rangle_y(t,y) = 0),$$

$$\langle u^y \rangle = V(t) \quad (\langle u^y \rangle_y = \langle u_y^y \rangle = -\langle u_z^z \rangle - \langle u_x^x \rangle = 0),$$

переходя от *одного* давления P и *трех* компонент скорости $u^{x,y,z}$ к двум зональным средним продольной скорости, W и U , и двум поперечным пульсациям – завихренности ω и скорости v , – с сохранением числа неизвестных, $1 + 3 = 2 + 2$,

$$P = P_{atm}(t) - z\sigma^z(t) - x\sigma^x(t) - \int_0^y \langle h^y \rangle(t, y') dy' + Th_z^z + Th_x^x,$$

$$u = Tv_{xy} - T\omega_z, \quad w = Tv_{zy} + T\omega_x \quad (\langle u \rangle = \langle w \rangle = 0),$$

$$u^x = U + u, \quad u^y = V(t) + v, \quad u^z = W + w,$$

$$\langle v \rangle = \langle \omega \rangle = 0 \quad (\langle u^x \rangle = U, \quad \langle u^z \rangle = W),$$

приходим к следующей записи Г-формы:

$$\frac{\partial W}{\partial t} - vW_{yy} + V(t)W_y + \langle v w \rangle_y = \langle g^z \rangle(t, y) + \sigma^z(t),$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - vU_{yy} + V(t)U_y + \langle v u \rangle_y = \langle g^x \rangle(t, y) + \sigma^x(t),$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - v\Delta\omega + \nabla \cdot \omega \mathbf{u} = g_z^x - g_x^z,$$

$$-\frac{\partial \Delta v}{\partial t} + v\Delta\Delta v + \nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})_y - \Delta(v\mathbf{u})) = g_{zy}^z + g_{xy}^x - \dot{\Delta}g^y,$$

для которой заметим, что с одной стороны ее дивергентные члены могут быть значительно упрощены, а, с другой стороны, даже эти упрощения не нарушат универсального закона сохранения сложности: новые уравнения не устранят основные трудности исходных.

◀ Приведем Г-форму к искомым четырем уравнениям. С учетом тождеств

$$\langle \Delta u^{z,x} \rangle = \langle u^{z,x} \rangle_{yy}, \quad \langle u^z v \rangle = \langle (W + w)v \rangle = \langle wv \rangle,$$

$$\langle \mathbf{u} \cdot \nabla u^z \rangle = \langle \nabla \cdot u^z \mathbf{u} \rangle = \langle u^z (V + v) \rangle_y = VW_y + \langle wv \rangle_y,$$

$$\langle \mathbf{u} \cdot \nabla u^x \rangle = \langle \nabla \cdot u^x \mathbf{u} \rangle = \langle u^x (V + v) \rangle_y = VU_y + \langle uv \rangle_y,$$

уравнения нулевых вихрей для продольных гидроускорений дают первую пару уравнений:

$$\langle h^{z,x} \rangle_y = 0, \quad \text{или} \quad \langle h^{z,x} \rangle = \langle h^{z,x} \rangle(t) = \sigma^{z,x}(t),$$

$$\langle h^z \rangle = \frac{\partial W}{\partial t} - vW_{yy} + V(t)W_y + \langle vW \rangle_y,$$

$$\langle h^x \rangle = \frac{\partial U}{\partial t} - vU_{yy} + V(t)U_y + \langle vU \rangle_y.$$

Преобразуя, далее, первый вихрь,

$$\begin{aligned} h_z^x - h_x^z &= \mathbf{j} \cdot \nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - v\Delta \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} \right) - \mathbf{j} \cdot \nabla \times \mathbf{g} = \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial t} - v\Delta \omega + \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \mathbf{u} - g_z^x + g_x^z, \end{aligned}$$

приходим к третьему уравнению.

Наконец, с учетом несжимаемости среды, преобразования

$$\mathbf{j} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{g}) = \mathbf{j} \cdot (\nabla \nabla \cdot \mathbf{g} - \Delta \mathbf{g}) = \nabla \cdot \mathbf{g}_y - \Delta g^y = g_{xy}^x + g_{zy}^z - \dot{\Delta} g^y,$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - v\Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad \mathbf{j} \cdot \nabla \times (\nabla \times \dot{\mathbf{u}}) = -\Delta \dot{u}^y + \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}_y = \\ &= -\frac{\partial \Delta v}{\partial t} + v\Delta \Delta v + \nabla \cdot \left((\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})_y - \Delta(v\mathbf{u}) \right) \end{aligned}$$

влекут последнее (четвертое) уравнение (для второго вихря) ■

Часть 4. Течения в периодическом канале

§10. Квазикомпактные алгебры

10.1. Оснащенные алгебры

Возвращаясь к уравнениям Навье, обратимся к анализу устойчивости одного из основных классических движений вязкой несжимаемой жидкости – двумерного течения Колмогорова в плоском периодическом канале, или в периодическом слое, рассматриваемом при отсутствии поперечной скорости ($u^z = 0$) и зависимости от соответствующей переменной z остальных неизвестных.

Переходим к изложению ряда необходимых предварительных конструкций общего характера.

Введем в рассмотрение исходное функциональное пространство.

Пусть $M = \{\dots, x, y, u, v, \dots\}$ – *оснащенная алгебра*, или *алгебра Ли*, т.е. линейное вещественное пространство с *коммутатором* (как билинейной кососимметричной операцией $x, y \rightarrow [x, y] \in M$, $[\alpha u + \beta v, y] = \alpha [u, y] + \beta [v, y]$, $[y, x] = -[x, y]$, $\alpha, \beta = const$, подчиненной *тождеству Якоби* $[u, [x, y]] = [[u, x], y] + [x, [u, y]]$), снабженное дополнительно операцией скалярного произведения $u, v \rightarrow (u, v)$.

Далее, пусть $H = \bar{M}$ – пополнение M в норме $\|u\| = (u, u)^{1/2}$.

Дополним *центр* $M_0 = \{x \in M : [x, u] = 0, u \in M\}$ (или *центральную компоненту*) алгебры M ее *сильной* и *слабой компонентами* M_1 и M_2 , как образованными ее элементами $x \in M$ и $y \in M$, допускающими *циклическую перестановку* сомножителей в *смешанных произведениях*

$(u, [v, x])$ и $(u, [v, y])$, выводящую или не выводящую эти элементы за пределы действия коммутатора,

$$(u, [v, x]) = (x, [u, v]), \quad (u, [v, y]) = (v, [y, u]),$$

$$x \in M_1, \quad y \in M_2, \quad u, v \in M,$$

соответственно.

10.2. Признак компактности

Согласно определению компактной алгебры M последняя совпадет при этом со своей сильной компонентой: $M_1 = M$. Она также может быть обнаружена наличием следующего свойства:

Совпадение $M_1 = M$ равносильно тождеству $(u, [u, v]) = 0$, $u, v \in M$ (признак компактности).

◀ Действительно, тождество $(u, [v, x]) = (x, [u, v])$, $u, v, x \in M$, влечет $(v, [v, u]) = 0$ ($x = v$), где замена v на $v + x$ приводит к тождеству $(v, [x, u]) + (x, [v, u]) = 0$, равносильному исходному ■

10.3. Структура оснащенной алгебры

Как и обычно, подалгеброй $N \hookrightarrow M$ алгебры M будем называть ее линейное подпространство, снабженное ее скалярным произведением и коммутатором, замкнутое относительно последнего: $x, y \in N$ влечет $[x, y] \in N$. Наличие следующих включений определяет при этом структуру оснащенной алгебры иллюстрируемую Рисунком 9:

$$M_0, M_1 \hookrightarrow M_2 \hookrightarrow M, \quad M_{p1} = M_p, \quad p = 0, 1, 2$$

(центральная, сильная и слабая компоненты оснащенной алгебры являются ее компактными подалгебрами, причем две первые из них – подалгебрами третьей).

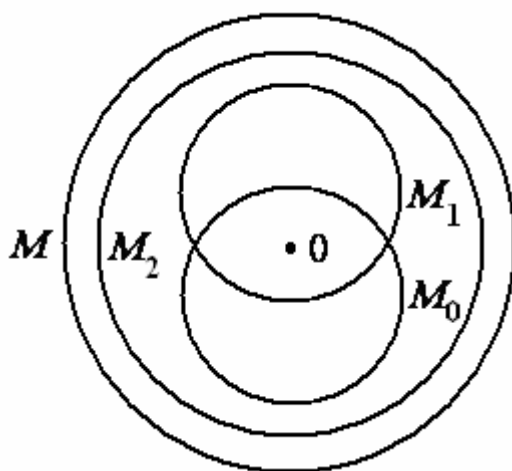


Рисунок 9 – Иллюстрация включений $M_0, M_1 \subset M_2 \subset M$.

◀ Действительно, $M_2 = \{y \in M : (u, [u, y]) = 0, u \in M\}$

(подстановка $v = u$ второе тождество из (1) влечет $(u, [u, y]) = 0$, замена u на $u + v$ в полученном равенстве влечет второе тождество из (1)). В таком случае, во-первых, $M_2 \subset M$, поскольку (в силу тождества Якоби) при $x, y \in M_2$

$$\begin{aligned} (u, [u, [x, y]]) &= (u, [[u, x], y]) + (u, [x, [u, y]]) = (u, [[u, x], y]) - \\ &- (u, [[u, y], x]) = ([u, x], [y, u]) - ([u, y], [x, u]) = 0, u \in M. \end{aligned}$$

Во-вторых, $M_1 \subset M_2$, поскольку $(u, [u, x]) = (x, [u, u]) = 0$, $u \in M$, $x \in M_1$ (следствие первого тождества из (1)). Следовательно, $M_1 \subset M_2$, поскольку при $x, y \in M_1 \subset M_2$ и $u, v \in M$

$$\begin{aligned} (u, [v, [x, y]]) &= (u, [[v, x], y]) + (u, [x, [v, y]]) = (y, [u, [v, x]]) + \\ &+ ([v, y], [u, x]) = (y, [[u, v], x]) + (y, [v, [u, x]]) - ([y, v], [u, x]) = \\ &= ([u, v], [x, y]) + ([u, x], [y, v]) - ([u, x], [y, v]) = ([u, v], [x, y]). \end{aligned}$$

Далее, замкнутость коммутатора в M_0 – прямое следствие тождества Якоби. Наконец, $M_0 \subset M_2$ (поскольку $[u, y] = 0$ влечет $(u, [u, y]) = 0$ $u \in M$, $y \in M_0$), а потому $M_0 \hookrightarrow M_2$ ■

10.4. Определение квазикompактной алгебры

В дальнейшем круг оснащенных алгебр сужается до квазикompактных алгебр, обобщающих непосредственно на бесконечномерный случай понятие компактной алгебры Ли.

Под *квазикompактной алгеброй* в условимся подразумевать оснащенную алгебру M , обладающей сильной компонентой M_1 , плотной в гильбертовом пространстве H алгебры M :

$$\bar{M}_1 = H = \bar{M}.$$

§11. Диссипативный волчок на квазикompактной алгебре

11.1. Аксиомы диссипативного волчка

Примем следующие 11 соглашений, или аксиом A1–A11, относящихся к квазикompактной алгебре и паре линейных операторов, действующих в ее гильбертовом пространстве:

A1. Определена квазикompактная алгебра M , $\bar{M}_1 = H = \bar{M}$, рассматриваемое одновременно как фазовое пространство (пространство значений) гладких (бесконечно дифференцируемых в естественной топологии) функций $x = x(t)$ параметра $t > 0$ (времени).

A2. Задана пара линейных операторов $A, B: H \rightarrow H$, M , с общей областью определения D и значениями из M .

A3. D не выходит за пределы сильной компоненты: $D \subset M_1$.

A4. D плотна в H : $\bar{D} = H$.

Заметим, что выполнение A1 необходимо для A3 и A4.

A5. A и B стационарны, т.е. перестановочны с операцией дифференцирования по времени $\partial/\partial t$.

A6. A и B симметричны: $(Au, v) = (u, Av)$, $(Bu, v) = (u, Bv)$, $u, v \in D$.

A7. A и B нормированы неравенствами $\gamma_1^2 (Bu, u) \leq (Au, Au) \leq \gamma_2^2 (Bu, u)$, $\gamma_{1,2} = \text{const} > 0$, $\gamma_1 \leq \gamma_2$, $u \in D$.

A8. Оператор $A: H \rightarrow H$ положительно определен: $(Au, u) \geq \lambda_0 (u, u)$, $\lambda_0 = \text{const} > 0$, $u \in D$.

В силу A7 и A8 положительно определен и оператор $B: H \rightarrow H$.

◀ Действительно, в этом случае необходимо, чтобы $(u, u) \leq \gamma_A^2 (Au, Au)$, $\gamma_A = \lambda_0^{-1}$ (поскольку $(Au, u) \leq \sqrt{(Au, Au)} \sqrt{(u, u)}$). Следовательно, $(u, u) \leq \gamma_B^2 (Bu, u)$, $\gamma_B = \gamma_A \gamma_2$ ■

В силу А6, А8 и предыдущего замечания на элементах D определены *новые* скалярные произведения $\langle u, v \rangle = (Au, v) = (u, Av)$ и $\{u, v\} = (Bu, v) = (u, Bv)$, $u, v \in D$, и нормы $\|u\|_{1/2} = \langle u, u \rangle^{1/2}$ и $\|u\|_1 = \{u, u\}^{1/2}$, ограничивающие исходную норму $\|u\|$ неравенствами $\|u\| \leq \gamma_A \|u\|_{1/2}$ и $\|u\| \leq \gamma_B \|u\|_1$, с определенными выше коэффициентами γ_A и γ_B .

Замыкания линейного многообразия D в нормах $\|u\|_{1/2}$ и $\|u\|_1$ условимся обозначать через $H_{1/2}$ и H_1 , соответственно.

А9. Операторы A, B либо *коммутативны*, т.е. $(Au, Bv) = (Bu, Av)$, $u, v \in D$ (случай К), либо *изометричны*, т.е. $(Au, Au) = (Bu, u)$, $u \in D$, и одновременно *центрированы* в том смысле, что $A\psi - \lambda\psi \in M_0$ для всех мод $\psi \neq 0$ *совместной* спектральной задачи $B\psi = \lambda A\psi$, принадлежащих ее *наименьшему* собственному числу $\lambda = \lambda_1 = \text{const} > 0$ (случай И).

А10. Определена система *главных мод* $\psi_n \in D$, $\psi_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что $A\psi_n = \lambda_n \psi_n$ в случае К или $B\psi_n = \lambda_n A\psi_n$ в случае И, образующая ортогональные базисы пространств $H_{1/2}$ и H_1 . Их A -образы $A\psi_1, A\psi_2, \dots$ при этом составляют ортогональный базис пространства H , а *главные моменты* $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ положительны, не убывают, и не имеют конечных предельных точек.

Как следствие А10, возможно представление пространств $H_{1/2}$ и H_1 (определенных в замечании 3) ортогональными суммами

конечномерных ядер $\text{Ker}A_\lambda = \{\psi \in D : A\psi = \lambda\psi\}$ или $\text{Ker}B_\lambda A = \{\psi \in D : B\psi = \lambda A\psi\}$, составленными по точкам λ спектра $P\sigma_A$ или $P\sigma_B$ прямой или совместной задач $A\psi = \lambda\psi$ или $B\psi = \lambda A\psi$, соответственно, т.е. справедливы следующие разложения по ядрам:

$$H = \bigoplus_{\lambda \in P\sigma_A} \text{Ker}A_\lambda = \bigoplus_{\lambda \in P\sigma_A} A(\text{Ker}A_\lambda), \quad H_1 = \bigoplus_{\lambda \in P\sigma_A} \text{Ker}A_\lambda \quad (\text{K}),$$

$$H = \bigoplus_{\lambda \in P\sigma_B} A(\text{Ker}B_\lambda A) \quad \text{и} \quad H_p = \bigoplus_{\lambda \in P\sigma_B} \text{Ker}B_\lambda A, \quad p=1/2, 1 \quad (\text{И}),$$

$$P\sigma_A = \{\lambda > 0 : A\psi = \lambda\psi, \psi \neq 0\}, \quad P\sigma_B = \{\lambda > 0 : B\psi = \lambda A\psi, \psi \neq 0\}.$$

При этом вторым разложением учитывается, что система образов $A\psi_n = \lambda_n\psi_n$ в случае K сводится к полной и ортогональной в H системе пропорций $\lambda_n\psi_n$ главных мод ψ_n первого разложения. Для случая $И$ полнота и ортогональность в H системы образов $A\psi_n$ (второе разложение) обеспечивается полнотой и ортогональностью в H_1 системы мод ψ_n (последнее разложение) и приведенным в А9 условием изометричности операторов A и B , сводящемся к тождеству $(Au, Av) = \{u, v\}$, $u, v \in D$.

◀ Действительно, в указанном случае сравнение сходимостей Фурье–разложений

$$\|f - f_A^n\|^2 = \sum_{k \geq n+1} \left((f, A\psi_k)^2 = \lambda_k^{-2} \{f, \psi_k\}^2 \right) \leq \lambda_{n+1}^{-2} \|f - f_1^n\|^2$$

$$\text{для} \quad f_A^n = \sum_{1 \leq k \leq n} \|\psi_k\|_1^{-2} (f, A\psi_k) A\psi_k$$

$$\text{и} \quad f_1^n = \sum_{1 \leq k \leq n} \|\psi_k\|_1^{-2} \{f, \psi_k\} \psi_k$$

$$\text{при} \quad \|f - f_1^n\|_1^2 = \sum_{k \geq n+1} \{f, \psi_k\}^2 \rightarrow 0$$

$$\text{влечет} \quad \|f - f_A^n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad f \in D \quad \blacksquare$$

A11. Коммутатор локально ограничен в H_1 константой $\gamma_0(u) > 0$, определенной для каждого $u \in D$, так, что $\| [u, v] \| \leq \gamma_0(u) \|v\|_1$, $v \in D$.

В заключение заметим, что все главные моды ψ_n в случае К центрированы: $A\psi_n - \lambda\psi_n = 0 \in M_0$ ($n = 1, 2, \dots$).

Отметим также, что с учетом вариационных свойств собственных чисел из (A10), конкретизируемых в приводимой ниже (в разделе 11.3) *спектральной лемме*, выбор числа λ_0 уточняется для случая К равенством $\lambda_0 = \lambda_1$.

Наконец, как следствие упомянутой спектральной леммы (из раздела 11.3), справедливость A10 обеспечивается выполнением следующих аксиом A10' и A10'':

A10'. Вложение $H_1 \subset H$ компактно (предполагает вместе с оценкой $\|u\| \leq \gamma_B \|u\|_1$, $u \in D$, частичную сходимость в слабой норме $\|u\|$ всякой последовательности из D , ограниченной в сильной норме $\|u\|_1$).

A10''. *Обобщенные* главные моды $\psi \neq 0$ как определенные для главных моментов $\lambda = const > 0$ при любых $v \in D$ нетривиальные решения уравнений $\langle \psi, v \rangle = \lambda(\psi, v)$ в $H_{1/2}$ (К) и $\{\psi, v\} = \lambda\langle \psi, v \rangle$ в H_1 (И) являются *гладкими* в том смысле, что совпадают с точностью до нуля (т.е. содержат в своих классах эквивалентности) соответствующие моды $\psi \in D$ прямой и совместной спектральных задач $A\psi = \lambda\psi$ (К) и $B\psi = \lambda A\psi$ (И), соответственно.

11.2. Инвариантность ядер главных моментов

Покажем, что в случае К (в случае И) включения $u \in \text{Ker} A_\lambda$ или $v \in H \ominus \text{Ker} A_\lambda$ (включения $u \in \text{Ker} B_\lambda A$ или $Av \in H \ominus A(\text{Ker} B_\lambda A)$),

соответственно) влекут включения $Vu \in \text{Ker}A_\lambda$ или $Bv \in H \ominus \text{Ker}A_\lambda$ (включения $Vu \in A(\text{Ker}B_\lambda A)$ или $Bv \in H \ominus A(\text{Ker}B_\lambda A)$).

◀ Действительно, в случае *K* условия $Au = \lambda u$, $Av = \lambda'v$, $\lambda, \lambda' \in P\sigma_A$ и $\lambda' \neq \lambda$ влекут $(\lambda' - \lambda)(Bu, v) = (Bu, Av) - (Au, Bv) = 0$. Следовательно, тождества $(Bu, v) = 0$ или $(u, Bv) = 0$, справедливые при любых $v \in \text{Ker}A_{\lambda'}$ или $u \in \text{Ker}A_\lambda$, соответственно, с учетом *первого* разложения по ядрам (из предыдущего раздела), немедленно влекут надлежащие включения $Vu \in \text{Ker}A_\lambda$ или $Bv \in H \ominus \text{Ker}A_\lambda$.

Далее, в случае *II* условия $Bu = \lambda Au$, $Bv = \lambda' Av$, $\lambda, \lambda' \in P\sigma_B$ и $\lambda' \neq \lambda$ вместе с предполагаемой в A10 (или *последним* разложением по ядрам) ортогональностью ядер $\text{Ker}B_\lambda A$ и $\text{Ker}B_{\lambda'} A$ в H_1 влекут тождества $(Bu, Av) = \lambda \{u, v\} = 0$ и $(Au, Bv) = \lambda' \{u, v\} = 0$, справедливые при любых $v \in H_1 \ominus \text{Ker}B_{\lambda'} A$ или $u \in \text{Ker}B_\lambda A$, соответственно, или, в силу *четвертого* разложения по ядрам, при любых $Av \in H \ominus A(\text{Ker}B_\lambda A)$ или $Au \in A(\text{Ker}B_{\lambda'} A)$, что в силу того же *четвертого* разложения предполагает надлежащие включения $Vu \in A(\text{Ker}B_{\lambda'} A)$ или $Bv \in H \ominus A(\text{Ker}B_\lambda A)$ ■

11.3. Спектральная лемма

Корректность постановки многих задач гидродинамики и других разделов физики (включая квантовую механику), часто нуждается в полноте надлежащей ортогональной системы собственных функций. Требуемая полнота при этом обеспечивается компактностью вложения соответствующих гильбертовых пространств. Об этом и утверждается в следующей *спектральной лемме*:

Пусть $S = \{\dots, x, y, u, v, \dots\}$ – линейное вещественное пространство со скалярными произведениями (x, y) и $\{u, v\}$ и компактно вложенными нормами $\|u\| \leq \gamma \|u\|'$, $\|u\| = (u, u)^{1/2}$, $\|u\|' = \{u, u\}^{1/2}$, $u \in S$, $\gamma = \text{const} > 0$, что предполагает частичную сходимость в слабой норме $\|u\|$ всякой последовательности из S , ограниченной в сильной норме $\|u\|'$. Далее, пусть T и T' – пополнения (или замыкания) пространства S в слабой и сильной нормах $\|u\|$ и $\|u\|'$, соответственно. Тогда задача о нахождении собственных чисел $\lambda = \text{const}$ и принадлежащих им элементов $w \in T'$, $w \neq 0$, вложения $T' \subset T$, удовлетворяющих при любых $v \in T'$ тождеству $\{w, v\} = \lambda (w, v)$, обладает счетным набором решений $w = w_1, w_2, \dots$, образующих ортогональные базисы пространств T и T' , и соответствующих собственных чисел $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots$, упорядоченных в неубывающую вариационную последовательность

$$\lambda_1 = \|w_1\|'^2 = \inf_{u \in S, \|u\|=1} \|u\|'^2 = \inf_{v \in S, v \neq 0} \frac{\|v\|'^2}{\|v\|^2}, \quad \|w_1\| = 1,$$

$$\lambda_{n+1} = \|w_{n+1}\|'^2 = \inf_{\substack{u \in S, \|u\|=1, \\ (u, w_1) = \dots = (u, w_n) = 0}} \|u\|'^2 = \inf_{\substack{u \in S, u \neq 0, \\ (u, w_1) = \dots = (u, w_n) = 0}} \frac{\|u\|'^2}{\|u\|^2} \geq \lambda_n, \quad \|w_{n+1}\| = 1,$$

$$\{w_n, v\} = \lambda_n (w_n, v), \quad v \in T', \quad n = 1, 2, \dots,$$

единственным частичным пределом которой служит бесконечно удаленная точка числовой прямой ∞ , достигаемая данной последовательностью в случае бесконечномерного пространства S .

◀ Действительно, в силу компактности вложения $T' \subset T$ можно считать без уменьшения общности, что последовательность $u_i \in S$, $i = 1, 2, \dots$, с единичной слабой нормой $\|u_i\| = 1$, на которой достигается положительная точная нижняя грань квадрата сильной нормы

$\lambda_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i\|^{\prime 2} > 0$, фундаментальна в слабой норме, т.е. $\|u_i - u_j\| \rightarrow 0$ при $i, j \rightarrow \infty$. В силу *тождества прямоугольника*

$$\|u_i - u_j\|^{\prime 2} = 2\|u_i\|^{\prime 2} + 2\|u_j\|^{\prime 2} - \|u_i + u_j\|^{\prime 2}$$

данная минимизирующая последовательность фундаментальна в сильной норме:

$$\begin{aligned} & 2\|u_i\|^{\prime 2} + 2\|u_j\|^{\prime 2} - \|u_i + u_j\|^{\prime 2} \leq \\ & \leq 2\left(\|u_i\|^{\prime 2} - \lambda_1\right) + 2\left(\|u_j\|^{\prime 2} - \lambda_1\right) + \lambda_1\left(2\|u_i\|^2 + 2\|u_j\|^2 - \|u_i + u_j\|^2\right) = \\ & = 2\left(\|u_i\|^{\prime 2} - \lambda_1\right) + 2\left(\|u_j\|^{\prime 2} - \lambda_1\right) + \lambda_1\|u_i - u_j\|^2 \rightarrow 0, \quad i, j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда, если w_1 есть предел в T' , а следовательно и в T ,

$$\|u_i - w_1\| \leq \gamma \|u_i - w_1\|' \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad \lambda_1 = \|w_1\|^{\prime 2} > 0, \quad \|w_1\| = 1,$$

получим, что для любого ненулевого элемента $v \in T$, $\|v\| > 0$, значения гладкой *функция Рэля*

$$R(t) = \|w_1 + tv\|^{\prime 2} \|w_1 + tv\|^2, \quad -\|w_1\|/\|v\| < t < \|w_1\|/\|v\|,$$

достигают минимума λ_1 в $t = 0$. Следовательно, производная

$$F'(0) = 2\{w_1, v\} - 2\|w_1\|^{\prime 2}(w_1, v) = 0,$$

что заканчивает доказательство существования в первого собственного числа λ_1 и принадлежащей ему собственной функции w_1 .

Заменив S на линейное многообразие элементов $v \in R$, ортогональных w_1 в T , $(w_1, v) = 0$, и повторив для него предыдущие рассуждения, приходим к следующей паре λ_2 и w_2 , и т.д.

Если S конечномерно, то рассуждения заканчиваются на конечном шаге.

В противном получаем некоторую последовательность пар собственных элементов $w_n \in T'$, $\|w_n\| = 1$, и чисел $\lambda_n = \|w_n\|^{\prime 2} > 0$. Ввиду

компактности вложения $T' \subset T$ и равенств $\|w_m - w_n\|^2 = 2$ при $m \neq n$ (поскольку $(w_m, w_n) = 0$) последовательность чисел λ_n не может иметь конечных предельных точек и, в частности, неограниченна: $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/\lambda_n = 0$.

Но тогда Фурье–суммы собственных элементов w_n приближают элементы $f \in S$ в T :

$$f^n = \sum_{k=1}^n (f, w_k) w_k,$$

$$\left\{ f, f^n \right\} = \sum_{k=1}^n (f, w_k) \{f, w_k\} = \sum_{k=1}^n (f, w_k)^2 \|w_k\|^2 = \left\| f^n \right\|^2,$$

$$f_{n+1} = f - f^n, \quad \left\| f_{n+1} \right\|^2 = \left\{ f - f^n, f - f^n \right\} = \|f\|^2 - \left\| f^n \right\|^2 \leq \|f\|^2,$$

$$\left(f_{n+1}, w_k \right) = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\left\| f_{n+1} \right\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \left\| f \right\|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{\lambda_{n+1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, их система полна в T ($(v, w_n) = 0, n = 1, 2, \dots$, влечет $v = 0$), а потому – и в T' :

$$\{v, w_n\} = 0 \quad \text{при} \quad (v, w_n) = \lambda_n^{-1} \{v, w_n\} \quad \text{влечет} \quad v = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \blacksquare$$

11.4. Уравнение волчка

При выполненных аксиомах A1-A11, задавшись элементом f квазикompактной алгебры M , как некоторым *моментом внешних сил*, и положительной константой ε , как *коэффициентом трения*, будем рассматривать в M задачу Коши для уравнения вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} Aw + \varepsilon Bw + [w, Aw] = f, \quad t > 0, \quad w|_{t=0} = w_0,$$

$$f \in M, \quad w \in D, \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

В отсутствии трения, $\varepsilon \rightarrow 0$, и на линейном многообразии свободных векторов эвклидова трехмерного пространства $D = M = R^3$, рассматриваемое уравнение представляет собой векторную форму уравнений Эйлера для угловой скорости w вращения волчка – абсолютно твердого тела с одной закрепленной точкой. Его оператором A служит матрица моментов инерции, его действием Aw – момент импульса, коммутатором – векторное произведение.

Главными моментами и вращениями при этом служат собственные числа λ и принадлежащие им собственные элементы w оператора (матрицы) инерции A . У соответствующего эллипсоида инерции K -волчка

$$(Ax, x) = \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^2 + \dots = 1, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} > a_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} > \dots > 0,$$

$$x = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots, \quad Aw_i = \lambda_i w_i,$$

$$(w_i, w_j) = 1 \quad (= 0) \quad \text{при } i = j \quad (i \neq j)$$

при этом выделяется *наибольшая ось* размера a_1 , направляемая *первым* главным вращением w_1 , принадлежащем *наименьшему* главному моменту λ_1 .

Классической *теоремой Эйлера* устанавливается устойчивость вращения трехмерного волчка без трения ($\varepsilon = 0$) вокруг как наибольшей так и наименьшей оси эллипсоида инерции.

Наша ближайшая задача – перенести первую часть этой теоремы, относящуюся к наименьшему главному моменту, на вращения (решения уравнения) бесконечномерного волчка с трением ($\varepsilon > 0$)

Наличие *момента силы трения* εBw в уравнении волчка этом случае приводит к *диссипации* (уменьшению со временем) его кинетической энергии $(Aw, w)/2$ со скоростью $\varepsilon(Bw, w)/2$. Поэтому

предполагаемая устойчивость *первого вращения*, или вращения с модой w_1 , должна получаться *асимптотической* (с затуханием со временем начальных возмущений данного вращения) и *глобальной* (не зависящей от величины коэффициента трения).

В общем случае данное уравнение естественно рассматривать как задающее вращения *абстрактного диссипативного волчка*, с инерцией A и диссипацией B , на квазикompактной алгебре M .

В дальнейшем ограничимся K - или I -волчками, как случаями K или I из аксиомы $A9$, соответственно.

Эллипсоид инерции I -волчка

$$(Bx, x) = \left(\frac{x_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b_2}\right)^2 + \dots = 1, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} > a_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} > \dots > 0,$$

$$x = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots, \quad Bw_i = \lambda_i Aw_i,$$

$$(Aw_i, w_j) = 1 \quad (= 0) \quad \text{при } i = j \quad (i \neq j)$$

также обладает *наибольшей осью* размера b_1 , направляемой *первым* главным вращением w_1 , принадлежащем *наименьшему* главному моменту λ_1 . Для него, следовательно, также должна быть справедлива теоремы Эйлера об устойчивости.

Случаи I - и K -волчка рассматриваются ниже параллельно.

11.5. Существование главных вращений

На каждом ядре $\text{Ker}A_\lambda$ K -волчка определен однозначно *правый обратный оператор диссипации* $B^{-1}: \text{Ker}A_\lambda \rightarrow \text{Ker}A_\lambda$, $BB^{-1}u = u$. Для момента сил $f = \psi$, совпадающего с произвольной модой данного ядра $\psi \in \text{Ker}A_\lambda$, волчок допускает *стационарное вращение (решение)* $w = w_f = \varepsilon^{-1}B^{-1}\psi$ (случай K). Моменту сил $f = A\psi$ I -волчка, совпадающему с A -образом *центрированной моды* $\psi \in \text{Ker}B_\lambda A$,

$A\psi - \lambda\psi \in M_0$, отвечает стационарное вращение вида $w = w_f = \varepsilon^{-1}\lambda^{-1}\psi$ (случай И).

◀ Действительно, $[w, Aw] = [w, Aw - \lambda w] = 0$ (случаи К, И) и $\varepsilon Bw = \lambda^{-1}Bw = A\psi = f$ (случай И). В случае К сужение симметричного и положительно определенного оператора диссипации на конечномерном пространстве, $B: \text{Ker}A_\lambda \rightarrow \text{Ker}A_\lambda$ необходимо обладает единственным правым обратным оператором $B^{-1}: \text{Ker}A_\lambda \rightarrow \text{Ker}A_\lambda$. Следовательно, $\varepsilon Bw = BB^{-1}\psi = \psi = f$:

$$\frac{\partial}{\partial t} Aw = A \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad [w, Aw] = [w, Aw - \lambda w] = 0 \quad (\text{К, И}),$$

$$\varepsilon Bw = BB^{-1}\psi = \psi = f \quad (\text{К}) \quad \text{и} \quad \varepsilon Bw = \lambda^{-1}Bw = A\psi = f \quad (\text{И}) \quad \blacksquare$$

11.6. Устойчивость основного вращения

Установим справедливость следующей теоремы о глобальной асимптотической устойчивости основного вращения, т.е. вращения диссипативного волчка на квазикompактной алгебре вокруг наибольшей оси эллипсоида инерции:

Пусть выполнены аксиомы A1-A11, $\lambda_1 > 0$ – первый, или наименьший главный момент волчка из раздела 11.4 и $w_f \neq 0$ – принадлежащее данному моменту основное вращение, как стационарное решение уравнения волчка из раздела 11.5, рассматриваемое как положение равновесия волчка. Далее, пусть $\lambda'_1 > \lambda_1$ – второй, или следующий за первым наименьший главный момент волчка. Наконец, пусть $w = w(t) \in D$, $t \geq 0$, – произвольное нестационарное вращение (решение уравнения) волчка и $v = w - w_f$ –

его отклонение от w_f . Тогда справедлива следующая оценка асимптотической устойчивости положения равновесия w_f в H_1 :

$$\|v\|_1 \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \|v_0\|_1 \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon \delta} (1 - e^{-\varepsilon \delta t}) \right) e^{-\sigma t}, \quad t > 0, \quad v = w - w_f, \quad v_0 = w_0 - w_f,$$

$$\kappa = \lambda \theta \gamma_1^{-1} \gamma_0(w_f), \quad \theta = (1 + \lambda \lambda_0^{-1}) (1 - \lambda'^{-1} \lambda)^{-1/2},$$

$$\delta = \varepsilon^{-1} (\sigma' - \sigma) = \gamma_2^{-2} (\lambda' - \lambda), \quad \sigma = \gamma_2^{-2} \varepsilon \lambda, \quad \sigma' = \varepsilon \gamma_2^{-2} \lambda',$$

$$\lambda' = \lambda'_1 = \inf_{\substack{u \in D, \|u\|_{1/2}=1, \\ \langle w_f, u \rangle = 0}} \|u\|_{1/2} > \lambda = \lambda_1 = \|w_f\|_{1/2} = \inf_{u \in D, \|u\|=1} \|u\|_{1/2} \quad (\text{случай К}),$$

$$\lambda' = \lambda'_1 = \inf_{\substack{u \in D, \|u\|_{1/2}=1, \\ \langle w_f, u \rangle = 0}} \|u\|_1 > \lambda = \lambda_1 = \|w_f\|_1 = \inf_{u \in D, \|u\|_{1/2}=1} \|u\|_1 \quad (\text{случай И}).$$

◀ Как очевидно, справедливость оценки обеспечивается выполнением двух неравенств

$$\|v\|_1 \leq \gamma_1^{-1} \gamma_2 \left(\|v_0\|_1 e^{-\sigma t} + \|v'_0\|_1 \frac{\kappa}{\sigma' - \sigma} (e^{-\sigma t} - e^{-\sigma' t}) \right) \quad \text{и} \quad \|v'_0\|_1 \leq \|v_0\|_1,$$

$$v'_0 = v_0 \ominus v_{0\lambda} \quad \text{в} \quad H_1,$$

$$v_{0\lambda} \in \text{Ker} A_\lambda \quad (\text{К}) \quad \text{или} \quad v_{0\lambda} \in \text{Ker} B_\lambda A \quad (\text{И}),$$

из которых второе очевидно, а первое получается в результате нижеследующих построений.

Прежде всего непосредственно из уравнения волчка следует уравнение в вариациях:

$$\frac{\partial}{\partial t} Av + \varepsilon Bv + [w_f, Av] + [v, Aw_f] + [v, Av] = 0.$$

Умножив его скалярно на $2v$ и $2Av$ в H , с учетом стационарности и симметричности инерции,

$$\left(v, \frac{\partial}{\partial t} Av \right) = \frac{\partial}{\partial t} (v, Av) - \left(\frac{\partial}{\partial t} v, Av \right) = \frac{\partial}{\partial t} (v, Av) - \left(\frac{\partial}{\partial t} Av, v \right),$$

циклической перестановки в смешанном произведении и включения $Aw_f - \lambda w_f \in M_0$ (A2–A6, A9),

$$\begin{aligned} (v, [v, Aw_f + Av]) &= (Aw_f + Av, [v, v]) = 0, \\ (Av, [w_f + v, Av]) &= (w_f + v, [Av, Av]) = 0, \\ (v, [w_f, Av]) &= (Av, [v, w_f]) \quad \text{и} \quad (Av, [v, Aw_f]) = \lambda (Av, [v, w_f]), \end{aligned}$$

придем к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (Av, v) + 2\varepsilon (v, Bv) &= 2 (Av, [w_f, v]) \\ \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t} (Av, Av) + 2\varepsilon (Av, Bv) &= 2\lambda (Av, [w_f, v]). \end{aligned}$$

После вычитания надлежащей пропорции первого тождества из второго, получим равносильные им

$$\begin{array}{l} \text{уравнения} \\ \text{равновесия} \end{array} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} J(v) + 2\varepsilon K(v) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (Av, Av) + 2\varepsilon (Av, Bv) = 2\lambda (Av, [w_f, v]), \end{cases}$$

$$\text{где } J(v) = (Av - \lambda v, Av) \quad \text{и} \quad K(v) = (Av - \lambda v, Bv).$$

Теперь покажем, что функционалы первого уравнения

$$J(v) = J(v'), \quad K(v) = K(v') \quad \text{и} \quad (Av, [w_f, v]) = (Av' - \lambda v', [w_f, v]),$$

где $v' = v \ominus v_\lambda$ в H_1 , $v_\lambda \in \text{Ker} A_\lambda$ (К) или $v_\lambda \in \text{Ker} B_\lambda A$ (И).

◀ Действительно, поскольку $w_f \in D \subset M_1$ и $Av_\lambda - \lambda v_\lambda \in M_0$,

имеем:

$$(Av, [w_f, v]) = (w_f, [v, Av - \lambda v]) = (w_f, [v, Av' - \lambda v']) = (Av' - \lambda v', [w_f, v])$$

(учитываются А1–А4 и А9).

Для случая К–волчка $Av_\lambda = \lambda v_\lambda$, и, следовательно,

$$J(v) = (Av' - \lambda v', Av) = (Av', Av - \lambda v) = J(v') \quad (\text{К}),$$

$$K(v) = (Av' - \lambda v', Bv) = (Bv', Av - \lambda v) = K(v') \quad (\text{К}).$$

Для случая И–волчка дополнительно учитывается четвертое разложение по ядрам раздела 11.1:

$$J(v) = \{v, v\} - \lambda \langle v, v \rangle = \{v', v'\} - \lambda \langle v', v' \rangle = J(v') \quad (\text{И}),$$

$$K(v) = (Av, Bv - \lambda Av) = (Av, Bv' - \lambda Av') = K(v') + (Av_\lambda, Bv')$$

$$\text{и } (Av_\lambda, Bv') = 0, \text{ поскольку } Bv' \in H \ominus A(\text{Ker} B_\lambda A) \quad (\text{И}) \blacksquare$$

Теперь, воспользовавшись последним разложением по ядрам (относящимся к случаю $p = 1$), зададимся произвольным (сколь угодно малым) $0 < \varepsilon < 1/\lambda$ для $\lambda = \lambda_1$ и приблизим в H_1 элемент $v' \in D$ его Фурье–суммой $v'^\varepsilon = \sum_{\lambda < \bar{\lambda} < 1/\varepsilon} v'_\lambda$ из главных мод v'_λ К– или И–волчка, принадлежащих сумме ядер $\text{Ker} A_{\bar{\lambda}}$ или $\text{Ker} B_{\bar{\lambda}} A$, соответственно, определяемых главными моментами $\bar{\lambda}$ из интервала $\lambda < \bar{\lambda} < 1/\varepsilon$, так, что имеем: $\|v' - v'^\varepsilon\|_1 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

При этом для доставляемых условиями А7 и А8 следующих приближений $J_\varepsilon(v')$ и $K_\varepsilon(v')$ функционалов $J(v')$ и $K(v')$,

$$J_\varepsilon(v') = (Av'^\varepsilon - \lambda v'^\varepsilon, Av') \quad \text{и} \quad K_\varepsilon(v') = (Av'^\varepsilon - \lambda v'^\varepsilon, Bv'),$$

$$|J_\varepsilon(v') - J(v')| \leq (1 + \lambda \lambda_0^{-1/2}) \gamma_2 \|v'^\varepsilon - v'\|_1 \|Av'\|,$$

$$|K_\varepsilon(v') - K(v')| \leq (1 + \lambda \lambda_0^{-1/2}) \gamma_2 \|v'^\varepsilon - v'\|_1 \|Bv'\|, \quad v' \in D,$$

$$J_\varepsilon(v') \rightarrow J(v') \quad \text{и} \quad K_\varepsilon(v') \rightarrow K(v'), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

получим, как очевидно, при $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda' = \lambda'_1$:

$$(Av'_\lambda, Av') = \|Av'_\lambda\|^2, \quad (v'_\lambda, Av') = (v'_\lambda, Av'_\lambda) = \bar{\lambda}^{-1} \|Av'_\lambda\|^2 \quad (\text{К}),$$

$$(Av'_\lambda, Av') = \{v'_\lambda, v'\} = \{v'_\lambda, v'_\lambda\} = \|Av'_\lambda\|^2 \quad (\text{И}),$$

$$(v'_\lambda, Av') = (Av'_\lambda, v') = \bar{\lambda}^{-1} \{v'_\lambda, v'\} = \bar{\lambda}^{-1} \{v'_\lambda, v'_\lambda\} = \bar{\lambda}^{-1} \|Av'_\lambda\|^2 \quad (\text{И}),$$

$$J_\varepsilon(v') = (Av'^\varepsilon - \lambda v'^\varepsilon, Av') = \sum_{\lambda < \bar{\lambda} \leq 1/\varepsilon} (Av'_\lambda - \lambda v'_\lambda, Av') =$$

$$= \sum_{\lambda < \bar{\lambda} \leq 1/\varepsilon} (1 - \bar{\lambda}^{-1} \lambda) \|Av'_\lambda\|^2 \geq (1 - \lambda'^{-1} \lambda) \sum_{\lambda < \bar{\lambda} \leq 1/\varepsilon} \|Av'_\lambda\|^2 \quad (\text{К, И}),$$

$$J_\varepsilon(v') = \sum_{\lambda < \bar{\lambda} \leq 1/\varepsilon} (1 - \bar{\lambda}^{-1}\lambda) \|Av'_\lambda\|^2 \leq \sum_{\lambda < \bar{\lambda} \leq 1/\varepsilon} \|Av'_\lambda\|^2 \leq \|Av'\|^2 \quad (\text{K, И}),$$

$$(Av'_\lambda, Bv') = \bar{\lambda} (v'_\lambda, Bv'), \quad (v'_\lambda, Bv') = \{v'_\lambda, v'\} = \|v'_\lambda\|_1^2 \quad (\text{K}),$$

$$(Av'_\lambda, Bv') = (Av'_\lambda, Bv'_\lambda) = \bar{\lambda} (Av'_\lambda, Av'_\lambda) = \bar{\lambda} (v'_\lambda, Bv') \quad (\text{И}),$$

$$(v'_\lambda, Bv') = \{v'_\lambda, v'\} = \|v'_\lambda\|_1^2 \quad (\text{K, И}),$$

$$\begin{aligned} K_\varepsilon(v') &= (Av'^\varepsilon - \lambda v'^\varepsilon, Bv') = \sum_{\lambda < \bar{\lambda} \leq 1/\varepsilon} (Av'_\lambda - \lambda v'_\lambda, Bv') = \\ &= \sum_{\lambda < \bar{\lambda} \leq 1/\varepsilon} (1 - \bar{\lambda}^{-1}\lambda) \bar{\lambda} \|v'_\lambda\|_1^2 \geq \lambda' \gamma_2^{-2} J_\varepsilon(v') \quad (\text{K, И}). \end{aligned}$$

Также не вызывает сомнений, что полученные оценки остаются в силе и в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$, так что имеем:

$$\|Av'\|^2 \geq J(v') \geq (1 - \lambda'^{-1}\lambda) \|Av'\|^2 \geq 0 \quad u \quad K(v') \geq \lambda' \gamma_2^{-2} J(v') \\ (\lambda = \lambda_1, \lambda' = \lambda'_1).$$

Тогда из *первого* уравнения равновесия следует оценка:

$$J(v') \leq J(v'_0) e^{-2\sigma t}, \quad t \geq 0, \quad (\text{поскольку } \frac{\partial}{\partial t} J(v') + 2\sigma J(v') \leq 0).$$

Обратимся ко *второму* уравнению равновесия. Имеем:

$$(Av, Bv) = K(v) + \lambda \|v\|_1^2 = K(v') + \lambda \|v\|_1^2 \geq \lambda \|v\|_1^2 \geq \lambda \gamma_2^{-2} \|Av\|^2.$$

Далее, с учетом оценок из раздела 11.1 и полученных выше находим, что

$$\|Av' - \lambda v'\| \leq \|Av'\| + \lambda \|v'\| \leq (1 + \lambda \lambda_0^{-1}) \|Av'\| \leq \theta J^{1/2}(v') \leq \theta \gamma_2 \|v'_0\|_1 e^{-\sigma t}, \\ \theta = (1 + \lambda \lambda_0^{-1}) (1 - \lambda'^{-1}\lambda)^{-1/2}.$$

Тогда A7 и A11 влекут:

$$\begin{aligned} \|[w_f, v]\| &\leq \gamma_3(w_f) \|v\|_1 \leq \gamma_1^{-1} \gamma_0(w_f) \|Av\|, \\ \lambda(Av, [w_f, v]) &= \lambda(Av' - \lambda v', [w_f, v]) \leq \lambda \|Av' - \lambda v'\| \|[w_f, v]\| \leq \\ &\leq \lambda \theta \gamma_2 \|v'_0\|_1 e^{-\sigma t} \gamma_1^{-1} \gamma_0(w_f) \|Av\| = \kappa \gamma_2 \|v'_0\|_1 e^{-\sigma t} \|Av\|, \end{aligned}$$

$$\kappa = \lambda \theta \gamma_1^{-1} \gamma_0(w_f).$$

С учетом полученной выше оценки

$$\varepsilon(Av, Bv) \geq \sigma \|Av\|^2, \quad \sigma = \varepsilon \lambda \gamma_2^{-2}.$$

второго уравнения равновесия, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \|Av\|^2 + 2\sigma \|Av\|^2 &\leq \frac{\partial}{\partial t} \|Av\|^2 + 2\varepsilon(Av, Bv) = \\ &= 2\lambda(Av, [w_f, v]) \leq 2\Theta e^{-\sigma' t} \|Av\|, \quad \Theta = \kappa \gamma_2 \|v'_0\|_1, \quad \sigma' = \varepsilon \lambda' \gamma_2^{-2}, \end{aligned}$$

$$\text{а потому} \quad \frac{\partial}{\partial t} e^{\sigma t} \|Av\| \leq \Theta e^{-(\sigma' - \sigma)t} \quad \text{всюду, где} \quad \|Av\|(t) > 0.$$

где постоянные σ и σ' определены, как в (1.5).

Остается воспользоваться интуитивно очевидной, но требующей доказательства приводимой ниже в разделе 11.8 леммы об интегральной оценке, чтобы заключить, что из полученного уравнения следует оценка:

$$\begin{aligned} \gamma_1 \|v\|_1 &\leq \|Av\| \leq \|Av_0\| e^{-\sigma t} + \frac{\Theta}{\sigma' - \sigma} (e^{-\sigma t} - e^{-\sigma' t}) \leq \\ &\leq \gamma_2 \|v_0\|_1 e^{-\sigma t} + \|v'_0\|_1 \frac{\kappa \gamma_2}{\sigma' - \sigma} (e^{-\sigma t} - e^{-\sigma' t}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

11.7. Единственность основного вращения

При выполненных условиях предыдущего утверждения основное вращение w_f является единственным стационарным решением уравнения волчка в D .

◀ Действительно, всякое стационарное вращение w – это решение нестационарного уравнения волчка при отсутствии зависимости от времени. Тогда, устремив t к ∞ в полученной выше оценке устойчивости

$$\|v\|_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \|v\|_1 \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \|v_0\|_1 \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon \delta} (1 - e^{-\varepsilon \delta t}) \right) e^{-\sigma t} = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

закключаем $v = w - w_f = 0$ ■

11.8. Лемма о мажоранте

При получении оценки устойчивости использовалось следующее вспомогательное утверждение.

Для всякой пары непрерывных вещественных функций $\varphi = \varphi(t)$ и $\omega = \omega(t)$, с неотрицательными значениями на луче $t \geq 0$, справедлива оценка: $\varphi(t) \leq \psi(t)$, с мажорантой $\psi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \omega(t') dt'$, если в точках $t > 0$ своих положительных значений первая из них является гладкой, а ее производная ограничена значениями второй, т.е. $\partial \varphi / \partial t \leq \omega(t)$ всюду, где $\varphi(t) > 0$ (лемма о мажоранте).

◀ Выделим две основные части доказательства.

Часть 1. Существует отрезок $0 \leq t \leq a$, $a > 0$, где $\varphi(t) \leq \psi(t)$.

◀ Имеем: либо $\varphi(t) = 0$ на некотором отрезке $0 \leq t \leq a$, $a > 0$, и тогда выполняется требуемая оценка: $\varphi(t) = \varphi(0) = 0 \leq \psi(t)$, либо $\varphi(t_n) > 0$ на некоторой монотонно убывающей последовательности точек $t_n > t_{n+1} > 0$, $n = 1, 2, \dots$, сходящейся к нулю: $t_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Воспользовавшись непрерывностью φ в последнем случае, заключаем о существовании номера последовательности $n = n_*$, такого, что $\varphi(t) > 0$ на интервале $0 < t < a = t_{n_*}$. Интегрирование на нем неравенства $\partial \varphi / \partial t \leq \omega(t)$ снова дает оценку $\varphi(t) \leq \psi(t)$ ■

Часть 2. Неравенство $\varphi(t) \leq \psi(t)$ всегда можно продолжить с любого наперед заданного отрезка $0 \leq t \leq a$, $a > 0$, на больший отрезок $0 \leq t \leq b$, $b > a$.

◀ Пусть $c = \sup\{a < d \leq 2a : \varphi(t) > 0, a < t < d\}$. Если $c = a$, то $\varphi(t) = 0 \leq \psi(t)$, $a \leq t \leq 2a$, и тогда $b = 2a$. Если $c > a$ (например, $c = \infty$), то $\varphi(t) > 0$ для всех $a < t < c$, и тогда, интегрируя неравенство $\partial\varphi/\partial t' \leq \omega(t')$ на полуинтервале $a < t' \leq t$, получим, что

$$\varphi(t) \leq \varphi(a) + \int_a^t \omega(t') dt' \leq \psi(a) + \int_a^t \omega(t') dt' = \psi(t), \quad a < t < c,$$

следовательно, $b = c$ ■

Ввиду непрерывности функций φ и ψ на луче $t \geq 0$ оценка части 1 для отрезков $0 \leq t \leq a$ сохраняется на полуинтервале $0 \leq t < c$ их *точной верхней грани* $c > 0$. При этом ограниченность c противоречила бы доказанному в части 2. Следовательно, $c = \infty$ ■

§12. Течения на торе и в кольце

12.1. Алгебра функций тока

Пусть теперь в роли алгебры $M = M(V)$ выступает линейное многообразие гладких (бесконечно дифференцируемых) вещественных функций $\varphi, \psi, \chi, \dots$, зависящих, быть может, от времени $t \geq 0$, определенных на *торе*, или *периодической плоскости*, с постоянными периодами l, h при известных средних значениях $\bar{\psi}$ в ячейке $V = \{0 < x < l, 0 < y < h\}$,

$$\psi(t, x+l, y) = \psi(t, x, y) = \psi(t, x, y+h), \quad -\infty < x, y < \infty,$$

$$\bar{\psi} = \frac{1}{lh} \int_0^l \int_0^h \psi dx dy = q, \quad l = 2\pi/\alpha, \quad h = 2\pi, \quad q, \alpha = \text{const}, \quad \alpha > 0,$$

или в *кольце*, или *периодическом канале*, с периодом l и шириной h ,

$$\psi(t, x+l, y) = \psi(t, x, y), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y \leq h.$$

Скалярным произведением и коммутатором для указанных функций служат интеграл произведения и скобки Пуассона:

$$(\varphi, \psi) = lh \bar{\varphi\psi} \quad \text{и} \quad [\varphi, \psi] = \varphi_y \psi_x - \varphi_x \psi_y.$$

Определив компоненты скорости равенствами $u^x = \psi_y$ и $u^y = -\psi_x$, будем рассматривать пространство $M(V)$ как алгебру функций тока ψ двумерного течения несжимаемой жидкости ($u^x_x + u^y_y = 0$) на периодической плоскости (или на торе $\bar{V} = V$, полученном отождествлением противоположенных сторон прямоугольника V) или в периодическом канале (или в кольце V , с границей $\partial V = \bar{V} \setminus V \neq \emptyset$, полученном отождествлением пары

противоположенных сторон $x=0, l$ ячейки V). Справедливость аксиомы A1 для указанного случая обеспечивает при этом следующее утверждение о структуре алгебры функций тока.

Центр $M_0(V)$ алгебры $M(V)$ составляют функции тока, не зависящие пространственных переменных: $M_0(V) = \{\psi : \psi_x = \psi_y = 0\}$.

На торе, с нулевым средним $\bar{\psi} = 0$, алгебра $M(V)$ компактна, $M_1(V) = M(V)$, $\partial V = \emptyset$, и ее центр тривиален, $M_0(V) = \{\psi = 0\}$. В кольце она квазикompактна, $\bar{M}_1(V) = \bar{M}(V)$, $\partial V \neq \emptyset$, а ее сильную и слабую компоненты образуют подалгебры функций тока, вырождающихся на границе, $M_1(V) = \{\psi : \psi|_{y=0,h} = 0\}$, и принимающих постоянные значения на каждом граничном цикле кольца, $M_2(V) = \{\varphi : \varphi_x|_{y=0,h} = 0\}$, соответственно.

◀ Действительно, тождество $\varphi_y \psi_x - \varphi_x \psi_y = 0$ в ячейке V возможно для любой $\varphi \in M(V)$, как очевидно, только при $\psi_x = \psi_y = 0$.

Далее, правая часть другого тождества $(\chi, [\varphi, \psi]) - (\psi, [\chi, \varphi]) = -\varphi_x \chi \psi|_{y=0}^{y=h}$, как очевидно, всегда обращается в 0 на торе и при следующих условиях в кольце: при любом произведении $\varphi \chi$ и необходимом ограничении $\psi|_{y=0,h} = 0$, определяющем компоненту $M_1(V)$, либо при любом произведении $\psi \chi$ и необходимом ограничении $\varphi_x|_{y=0,h} = 0$, определяющем компоненту $M_2(V)$.

Наконец, хорошо известная плотность множества функций $M_1(V)$, вырождающихся на границе области с компактным замыканием, в пространстве квадратично суммируемых функций $\bar{M}(V)$, отдельно для кольца устанавливаемая ниже в разделе 11.5 ■

12.2. Волчок задачи Колмогорова

Инерцию A и диссипацию B определим сужениями операций

$$-\Delta\psi = -\psi_{xx} - \psi_{yy} \quad (A) \quad \text{и} \quad \Delta\Delta\psi = \psi_{xxxx} + 2\psi_{xxyy} + \psi_{yyyy} \quad (B),$$

соответственно, на нулевом расходе $\psi = 0$ на торе (условия тора) или условиях прилипания в кольце,

$$\psi(t, x+l, y) = \psi(t, x, y), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < h, \quad \psi, \psi_y \Big|_{y=0, h} = 0,$$

(условия кольца) что задает их общую область определения $D = D(V)$.

Общее уравнение волчка (из раздела 11.4) принимает форму уравнения для функции тока ψ плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости,

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Delta\psi + \varepsilon \Delta\Delta\psi - \psi_y \Delta\psi_x + \psi_x \Delta\psi_y = -\varepsilon \cos y, \quad \varepsilon = \text{const} > 0,$$

где правая часть (выступающая в роли момента внешних сил) выбрана пропорцией простейшей моды Фурье $\cos y$, $0 \leq y \leq h = 2\pi$, что и определяет волчок задачи Колмогорова.

12.3. Параметры и основное течение

Задача, поставленная выше в разделах 11.1 и 11.2, приведена для случая безразмерных переменных и при заданной внешней перемешивающей силе $-\varepsilon \cos y$, нормированной на обратную величину ε числа Рейнольдса $UL/\nu = 1/\varepsilon$. Характерные длина L и скорость U определяются из рассматриваемого для заданных кинематической вязкости ν и поля ускорений внешних массовых сил $\mathbf{g} = \mathbf{i}g^{x'} + \mathbf{j}g^{y'}$, с амплитудой g , соответствующего уравнения в размерных переменных:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Delta' \psi' + \nu \Delta' \Delta' \psi' - \psi'_{y'} \Delta' \psi'_{x'} + \psi'_{x'} \Delta' \psi'_{y'} = g^{y'} - g^{x'},$$

$$g^{x'} = g \sin \frac{2\pi y'}{H}, \quad g^{y'} = 0, \quad v, g = \text{const} > 0,$$

$$\psi'(t', x' + H/\alpha, y') = \psi'(t', x', y'), \quad 0 < y' < H.$$

Переход к безразмерным переменным по формулам

$$x' = Lx, \quad y' = Ly, \quad t' = \frac{L}{U}t,$$

$$\psi'(t', x', y') = LU\psi(t, x, y) \quad \text{и} \quad \psi(t, x + H/L\alpha, y) = \psi(t, x, y)$$

влечет соотношение

$$-\Delta\psi_t + \frac{v}{LU}\Delta\Delta\psi - \psi_y\Delta\psi_x + \psi_x\Delta\psi_y = -\frac{2\pi g}{H} \frac{L^2}{U^2} \cos \frac{2\pi Ly}{H}.$$

Последнее дает приведенное выше уравнение (раздела 11.2) при

$$L = \frac{H}{2\pi}, \quad \frac{v}{LU} = \varepsilon \quad \text{и} \quad \frac{2\pi g}{H} \frac{L^2}{U^2} = \varepsilon,$$

$$\text{или} \quad U = \frac{g}{v} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \quad \text{и} \quad \varepsilon = \frac{v^2}{g} \left(\frac{2\pi}{H} \right)^3.$$

Поставленные ранее граничные условия для случая периодической плоскости (или тора) приводят к классической задаче Колмогорова, которая здесь продолжается на канал (или кольцо) с условиями прилипания.

Точные решения задачи Колмогорова

$$\psi = \psi_* + q, \quad \psi_* = -\cos y,$$

$$-\Delta\psi_* = \psi_*, \quad \psi_* = 0, \quad \text{на торе (или периодической плоскости),}$$

$$\text{и} \quad \psi = \psi_* = 1 - \cos y, \quad \Delta\Delta\psi_* = -\Delta\psi_*, \quad 0 \leq y \leq h = 2\pi,$$

$$\psi_*, \quad \psi_{*y} \Big|_{y=0,h} = 0, \quad \text{в кольце (или канале),}$$

определяют общее для указанных двух случаев течение Колмогорова, с компонентами скорости $u_*^x = \sin y$ и $u_*^y = 0$.

Вопрос устойчивости данного течения и составляет предмет дальнейших рассмотрений. Последние будут сводиться к проверке

выполнения для исследуемого волчка условий общей теоремы об устойчивости из раздела 11.6.

12.4. Составляющие главных мод

Проведем предварительный анализ исследуемого случая. Прежде всего, отметим следующие пять *свойств задачи 1–5* рассматриваемой задачи:

С в о й с т в о 1. Для сужений A и B операций $-\Delta$ и $\Delta\Delta$, соответственно, на условиях тора или кольца из раздела 12.2, выполнены соотношения:

$$(A\varphi, \psi) - (\varphi, A\psi) = \int_0^l (\varphi\psi_y - \varphi_y\psi) \Big|_{y=0}^{y=h} dx = 0, \quad \varphi, \psi \in M_1(V);$$

$$(B\varphi, \psi) - (\varphi, B\psi) = \int_0^l (\psi\Delta\varphi_y - \psi_y\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi_y + \varphi_y\Delta\psi) \Big|_{y=0}^{y=h} dx = 0,$$

$$(B\psi, \psi) - \langle A\psi, A\psi \rangle = (\psi\Delta\psi_y - \psi_y\Delta\psi) \Big|_{y=0}^{y=h} = 0,$$

$$(A\varphi, B\psi) - (B\varphi, A\psi) = \int_0^l ((\Delta\psi)\Delta\varphi_y - (\Delta\varphi)\Delta\psi_y) \Big|_{y=0}^{y=h} dx, \quad \varphi, \psi \in D(V),$$

$$\text{и } (A\varphi, B\psi) - (B\varphi, A\psi) = 0 \text{ в случае (1.14).}$$

С в о й с т в о 2. Компоненты скорости $u^x = \psi_y$, $u^y = -\psi_x$ и левая часть уравнения для функции тока из раздела 12.2 не меняются при переходе к разности $\psi \rightarrow \psi - \bar{\psi}$ с нулевым средним $\bar{\psi} - \bar{\psi} = \bar{\psi} - \bar{\psi} = 0$ ($\bar{\bar{\psi}} = \bar{\psi}$).

С в о й с т в о 3. Определенные на торе функции

$$\psi_{nk} = \begin{cases} \sin \alpha nx \sin ky, & \cos \alpha nx \cos ky, \\ \sin \alpha nx \cos ky, & \cos \alpha nx \sin ky \end{cases}, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots, \quad n + k > 0,$$

$$-\Delta\psi_{nk} = \lambda_{nk}\psi_{nk}, \quad \lambda_{nk} = (\alpha n)^2 + k^2,$$

с нулевым средним $\bar{\psi} = 0$, служат главными вращениями волчка задачи Колмогорова из раздела 11.2 и образуют ортогональные базисы соответствующих пространств H , $H_{1/2}$ и H_1 из раздела 11.1. Постоянная λ_0 из аксиомы A8 раздела 11.1 определяется при этом величиной $\min\{1, \alpha^2\}$.

С в о й с т в о 4. *Определенные в замыкании кольца функции тока*

$$\varphi_{nk} = \sin \frac{ky}{2} \sin \alpha nx, \quad \sin \frac{ky}{2} \cos \alpha nx, \quad n = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$-\Delta \varphi_{nk} = \mu_{nk} \varphi_{nk}, \quad \varphi_{nk}|_{y=0,h} = 0, \quad \mu_{nk} = (\alpha n)^2 + (k/2)^2,$$

образуют ортогональный базис пространств H и $H_{1/2}$ из раздела 11.1. Постоянная λ_0 из аксиомы A8 раздела 11.1 определяется при этом величиной $\min\{1/4, \alpha^2\}$.

С в о й с т в о 5. *Для показанных на Рисунке 10 абсцисс $b_n^k = b_n^k(\alpha) > 0$ точек пересечения графиков изображенных функций, таких, что*

$$k - 1/2 < b_{n+1}^{2k-1} < b_n^{2k-1} < b_0^{2k-1} = k < b_{n+1}^{2k} < b_n^{2k} < b_0^{2k} < k + 1/2, \quad n, k = 1, 2, \dots,$$

$$\operatorname{tg} b_n^{2k-1} \pi = -\frac{\alpha n \operatorname{th} \alpha n \pi}{b_n^{2k-1} \pi}, \quad \operatorname{tg} b_n^{2k} \pi = \frac{\operatorname{th} \alpha n \pi}{\alpha n \pi} b_n^{2k} \pi, \quad \operatorname{tg} b_0^{2k} \pi = b_0^{2k} \pi,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{2k} = k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^{2k-1} = k - \frac{1}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_0^{2k}}{k + 1/2} = 1,$$

определенные в замыкании кольца функции тока

$$\psi_{nk} = \{\Psi_{nk}(y) \sin \alpha nx, \Psi_{nk}(y) \cos \alpha nx\},$$

$$\text{где } \Psi_{n,2k-1} = \frac{\cos b_n^{2k-1}(y-\pi)}{\cos b_n^{2k-1} \pi} - \frac{\operatorname{ch} \alpha n (y-\pi)}{\operatorname{ch} \alpha n \pi}$$

$$\text{и } \Psi_{n,2k} = \frac{\sin b_n^{2k}(y-\pi)}{\sin b_n^{2k} \pi} - \frac{\operatorname{sh} \alpha n (y-\pi)}{\operatorname{sh} \alpha n \pi},$$

$$\Psi_{0,2k} = \sin b_0^{2k} (y - \pi) - \frac{y - \pi}{\pi} \sin b_0^{2k} \pi, \quad \Psi_{0,2k-1} = (-1)^k - \cos b_0^{2k-1} (y - \pi),$$

служат главными вращениями гидродинамического волчка раздела 12.1,

$$\Delta \Delta \psi_{nk} = -\lambda_{nk} \Delta \psi_{nk}, \quad \psi_{nk}, \psi_{nky} \Big|_{y=0,h} = 0, \quad \lambda_{nk} = (\alpha n)^2 + (b_n^k)^2,$$

и образуют ортогональные базисы пространств H , $H_{1/2}$ и H_1 из раздела 11.1.

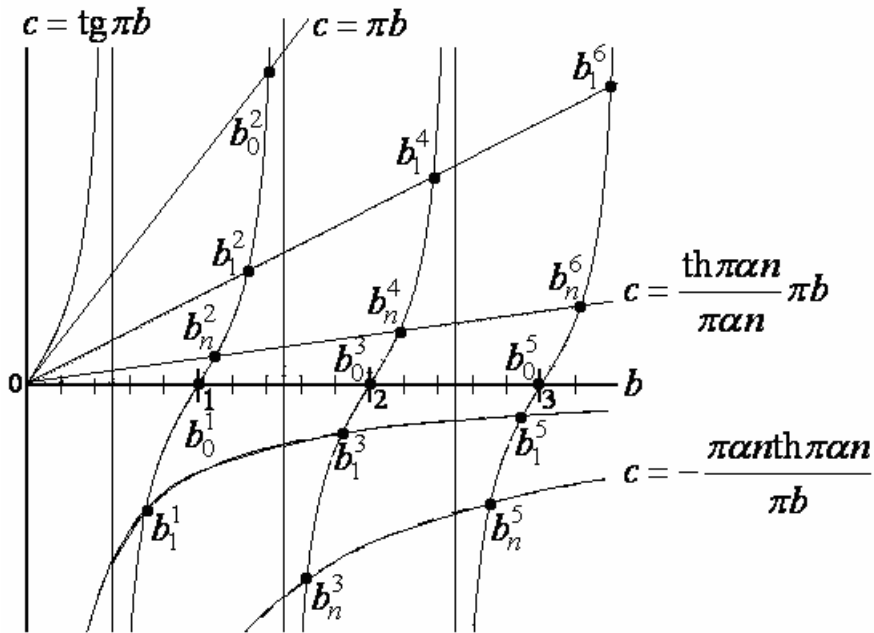


Рисунок 10 – Серии абсцисс b_n^k , $n=0,1,2,\dots$, $k=1,2,\dots$, главных моментов $\lambda_{nk} = (\alpha n)^2 + (b_n^k)^2$ волчка задачи Колмогорова в кольце (периодическом канале).

◀ Справедливость свойств 1–5 легко устанавливается путем непосредственной проверки. Сделаем необходимые пояснения к последнему из них. Решение рассматриваемой в нем спектральной задачи отыскивается, как и обычно, разделением переменных, или разложением по базисным функциям $\sin \alpha n x$, $\cos \alpha n x$, $n=0,1,2,\dots$, периода $0 \leq x \leq l$. Последнее приводит к спектральной задаче

$$D_\beta D_\beta \Psi = \lambda D_\beta \Psi, \quad D_\beta \equiv -d^2/dy^2 + \beta^2, \quad 0 < y < h,$$

$$\Psi, \Psi'|_{y=0,h} = 0 \quad (\Psi' \equiv d\Psi/dy), \quad \lambda = \beta^2 + b^2, \quad \beta = \alpha n,$$

для коэффициентов разложения $\Psi = \Psi(y) = \Psi_{nk}(y)$ и соответствующих собственных чисел $\lambda = \lambda_{nk}$ ■

12.5. Полнота системы главных мод

С в о й с т в о 6. Для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ собственные функции $\Psi = \Psi_{nk}$, $k = 1, 2, \dots$, последней спектральной задачи (из раздела 12.4) образуют полные и ортогональные системы мод на отрезке $0 \leq y \leq h$ относительно определяемых интегралом

$$\bar{\Psi} = \int_0^h \Psi(y) dy$$

норм скалярных произведений

$$|\Psi|_{1/2} = \sqrt{(\Psi, \Psi)_{1/2}}, \quad (\Phi, \Psi)_{1/2} = \overline{\Phi' \Psi' + \beta^2 \Phi \Psi},$$

$$\text{и } |\Psi|_1 = \sqrt{(\Psi, \Psi)_1}, \quad (\Phi, \Psi)_1 = \overline{\Phi'' \Psi'' + 2\beta^2 \Phi' \Psi' + \beta^4 \Phi \Psi}.$$

Даная задача равносильна при этом выполнению интегрального тождества

$$(\Phi, \Psi)_1 = \lambda (\Phi, \Psi)_{1/2}$$

на линейном многообразии L гладких вещественной функций $\Phi = \Phi(y)$, удовлетворяющих поставленным в рассматриваемой задаче граничным условиям.

◀ Действительно, последнее тождество получается умножением уравнения рассматриваемой задачи (из раздела 12.4) на Φ , интегрированием его на отрезке $0 \leq y \leq h$ и использованием для Φ условий прилипания $\Phi, \Phi'|_{y=0,h} = 0$:

$$\Phi\Psi' = \Phi'\Psi = \Phi D_\beta \Psi' = \Phi' D_\beta \Psi = 0 \text{ при } y=0, h,$$

$$\text{а потому } \overline{\Phi D_\beta \Psi} = (\Phi, \Psi)_{1/2}$$

$$\text{и } \overline{\Phi D_\beta D_\beta \Psi} = \overline{(D_\beta \Phi) D_\beta \Psi} = (\Phi, \Psi)_1.$$

Далее, с учетом указанных условий прилипания $\Psi'|_{y=0,h} = 0$ и непосредственно обеспечиваемого ими *неравенства Пуанкаре–Стеклова*

$$|\Psi|_1 \geq (\pi/h) |\Psi|_{1/2} \text{ для случая } \beta = 0 \text{ (или } n = 0)$$

и очевидной оценки

$$\beta^2 |\Psi|_{1/2}^2 \leq \overline{2\beta^2 \Psi'^2 + \beta^4 \Psi^2} \leq |\Psi|_1^2 \text{ для случая } \beta > 0 \text{ (или } n > 0),$$

приходим к вложению

$$|\Psi|_{1/2} \leq \gamma |\Psi|_1, \text{ где } \gamma = h/\pi = 2 \text{ (} \gamma = 1/\beta \text{) для } \beta = 0 \text{ (для } \beta > 0).$$

Последнее компактно ввиду теоремы Арцела–Асколи и относящихся к ней неравенств

$$\Psi(y+\delta) - \Psi(y) = \int_y^{y+\delta} \Psi'(\tilde{y}) d\tilde{y} \leq \delta^{1/2} |\Psi|_{1/2} \leq \delta^{1/2} \gamma |\Psi|_1,$$

$$\text{и } \Psi'(y+\delta) - \Psi'(y) = \int_y^{y+\delta} \Psi''(\tilde{y}) d\tilde{y} \leq \delta^{1/2} |\Psi|_1, \quad 0 \leq y, y+\delta \leq h,$$

так что остается воспользоваться утверждением спектральной леммой из раздела 11.3 ■

12.6. Сравнение главных моментов

Свойство 7. Гладкая функция

$$f(\eta) = a^2 + b^2, \quad \text{а} \text{ т} \text{а} = \eta, \quad b = \pi/2 + \arctg(b/\eta), \quad \eta > 0,$$

обладает следующими свойствами:

$$f(+0) = \pi^2; \quad f' < 0 (> 0), \quad \eta < 1 (> 1); \quad f/\eta^2 \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty.$$

◀ Действительно, $b \rightarrow \pi$ при $\eta \rightarrow 0$ и $\text{т} \text{а} \rightarrow 1$ при $a \rightarrow \infty$ (или $\eta \rightarrow \infty$), что обеспечивает справедливость первого и последнего из

приведенных свойств. Неравенства для производной f' следуют из непосредственно проверяемых соотношений

$$\frac{df}{2d\eta} = \frac{a^2}{a^2 + \eta - \eta^2} - \frac{b^2}{b^2 - \eta + \eta^2} = \frac{(a^2 + b^2)\eta(\eta - 1)}{(a^2 + \eta - \eta^2)(b^2 - \eta + \eta^2)},$$

$$a^2 + \eta - \eta^2 > \eta > 0 \quad (a > \eta) \quad \text{и} \quad b^2 - \eta + \eta^2 > (\pi/2)^2 - (1/2)^2 > 0 \quad \blacksquare$$

С в о й с т в о 8. Для первого из моментов λ_{n1} , $n=1,2,\dots$ в свойстве 5 (из раздела 12.4), уравнение $\lambda_{11}(\alpha)=1$ обладает единственным положительным корнем $1/\pi < \alpha_1 < \alpha = \alpha_* < \sqrt{3}/2$, $\pi\alpha_1 \text{th}\pi\alpha_1 = 1$, таким, что $\lambda_{11}(\alpha) > 1$ при $\alpha > \alpha_*$ и $\lambda_{11}(\alpha) < 1$ при $\alpha < \alpha_*$. Оставшиеся моменты $\lambda_{n1}(\alpha) > \lambda_{11}(\alpha)$ при $n > 1$ и $\alpha \geq \alpha_*$.

◀ Действительно, в силу свойства 7 при $\eta = a \text{th} a$ и $a = \pi\alpha$ уравнение $f(\eta) = \pi^2$ имеет единственный положительный корень, $\eta_* = \pi\alpha_* \text{th}\pi\alpha_* > \pi\alpha_1 \text{th}\pi\alpha_1 = 1$, определяющий $\alpha_* > \alpha_1$, с оценкой $\alpha_* > 1/\pi$ (поскольку $\pi\alpha_* > \text{th}\pi\alpha_*$). При $\alpha \geq \sqrt{3}/2$ величина $f(\eta) = a^2 + b^2 > \pi^2$, что влечет $\alpha_* < \sqrt{3}/2$. То же свойство влечет неравенство $f(\eta') > f(\eta)$, $\eta' > \eta \geq \pi\alpha_* \text{th}\pi\alpha_* > 1$. Положив в нем $\eta' = \pi\alpha \text{th}\pi\alpha$ и $\eta = \pi\alpha \text{th}\pi\alpha$ для $n = 2, 3, \dots$, получим требуемую оценку $\lambda_{n1}(\alpha) > \lambda_{11}(\alpha)$, $\alpha \geq \alpha_*$ ■

С в о й с т в о 9. Если главный фактор $l/h = 1/\alpha$, не превосходит 1 для тора или обратной величины $1/\alpha_*$ положительного корня $\alpha = \alpha_*$ уравнения $\lambda_{11}(\alpha_*) = 1$ для кольца, то $\lambda_{n,k+1} > \lambda_{n1}$ и $\lambda_{n,k+2} > \lambda_{n2}$ для $n+1, k=1, 2, \dots$. При этом равный 1 главный момент основного вращения (из раздела 12.3) волчка (из раздела 12.2) оказывается наименьшим: $\lambda_{nk} \geq \lambda_{01} = \lambda = 1$.

◀ Для случая тора это свойство очевидно: $\lambda_{n,k+1} > \lambda_{nk} \geq \lambda_{n0} \geq \lambda_{10} = \alpha^2 \geq 1 = \lambda_{01}$, $n, k = 1, 2, \dots$. Для случая кольца первые неравенства из свойства 5 (раздела 12.4) влекут, что

$$k - 1/2 < b_n^{2k-1} < b_n^{2k} < k + 1/2 < b_n^{2k+1} < b_n^{2k+2}, \quad n+1, k=1, 2, \dots,$$

$$\lambda_{n,2k+1} - \lambda_{n,2k-1} = (b_n^{2k+1})^2 - (b_n^{2k-1})^2 > 0, \quad \lambda_{n,2k} - \lambda_{n,2k-1} = (b_n^{2k})^2 - (b_n^{2k-1})^2 > 0,$$

$$\lambda_{n,2k+1} - \lambda_{n,2k} = (b_n^{2k+1})^2 - (b_n^{2k})^2 > 0, \quad \lambda_{n,2k+2} - \lambda_{n,2k} = (b_n^{2k+2})^2 - (b_n^{2k})^2 > 0$$

(что иллюстрирует Рисунок 10) и, следовательно, $\lambda_{n,k+1} > \lambda_{n1}$ и

$\lambda_{n,k+2} > \lambda_{n2}$, $n+1, k=1, 2, \dots$. Остается воспользоваться оценкой

$\lambda_{11} \geq 1 = \lambda_{01}$, $\alpha \geq \alpha_*$ (свойство 8), и полученными неравенствами:

$\lambda_{nk} \geq \lambda_{n1} > \lambda_{11} \geq 1 = \lambda_{01}$, $\alpha \geq \alpha_*$, $n, k=1, 2, \dots$ ■

С в о й с т в о 10. При выполненных условиях свойства 9 следующим за $\lambda = 1$ наименьшим главным моментом $\lambda' > 1$ волчка задачи Колмогорова (из раздела 12.2) служит на торе $\lambda' = \lambda_{11} = 2$ при $\alpha = 1$ или $\lambda' = \min\{\lambda_{10} = \alpha^2, \lambda_{02} = 4\}$ при $\alpha > 1$ и в кольце $\lambda' = \lambda_{02}$ при $\alpha = \alpha_*$ или $\lambda' = \min\{\lambda_{11}, \lambda_{02}\}$ при $\alpha > \alpha_*$.

◀ Для случая тора имеем:

$$\lambda_{nk} = \alpha^2 n^2 + k^2 \geq \lambda_{11} > \lambda_{10} = \lambda_{01}, \quad \alpha = 1, \quad n, k \geq 1;$$

$$\lambda_{nk} \geq \lambda_{22} > \lambda_{21} > \lambda_{20}, \lambda_{12} > \lambda_{02}, \min\{\lambda_{10}, \lambda_{11}\} = \lambda_{10} > \lambda_{01}, \quad \alpha > 1, \quad n, k \geq 2.$$

Для случая кольца получаем из свойства 9: $\lambda_{nk} \geq \lambda_{n1} \geq \lambda_{11}$ при $n, k \geq 1$ и $\lambda_{nk} \geq \lambda_{n2} \geq \lambda_{02} > 1$ при $n \geq 0$ и $k \geq 2$. В силу свойства 8, при $\alpha = \alpha_*$ имеем $\lambda_{11} = 1$, а значит $\lambda' = \lambda_{02}$; при $\alpha > \alpha_*$ $\lambda_{11} > 1$, следовательно, $\lambda' = \min\{\lambda_{11}, \lambda_{02}\}$ ■

12.7. Устойчивость основного течения

С в о й с т в о 11. Если главный фактор $l/h = 1/\alpha$, не превосходит 1 для тора или обратной величины $1/\alpha_*$ положительного корня $\alpha = \alpha_*$ уравнения $\lambda_{11}(\alpha_*) = 1$ для кольца, то для алгебры функций

тока $M = M(V)$ (из раздела 12.1) и волчка задачи Колмогорова (из раздела 12.2) на торе, с нулевым средним $q=0$, или в кольце, с условиями прилипания, выполнены аксиомы A1–A11 (из раздела 11.1). Волчок (1.19) при этом изометричен ($\gamma_1 = \gamma_2 = 1$), равный 1 главный момент его стационарного вращения, отвечающего течению Колмогорова (из раздела 12.3) минимален ($\lambda_{nk} \geq 1$), постоянная λ_0 из A8 определена как в свойствах 3 и 4, а входящая в A11 постоянная $\gamma_0 = \lambda_0^{-1/4}$.

◀ Справедливость аксиомы A1 – следствие рассмотренной в разделе 12.1 структуры алгебры функций тока. Вместе со свойствами 3 и 4 наличие указанной структуры гарантирует также справедливость аксиом A2–A5 для указанных в разделе 12.2 инерции A и диссипации B на условиях тора (при $q=0$) или кольца (с прилипанием). Аксиомы A6 и A7 следуют из свойства 1, аксиома A8 и указанные значения λ_0 – из свойств 3 и 4. Аксиома A9 следует и определяемые этой аксиомой свойства центрированности и изометричности рассматриваемого волчка следуют из указанной структуры и свойства 1. Справедливость аксиомы A10 обеспечивается свойств 3 и 5. Остается проверить выполнение последней аксиомы A11. Имеем:

$$\begin{aligned} (\varphi_y \psi_x - \varphi_x \psi_y)^2 &= (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)(\psi_x^2 + \psi_y^2) - (\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y)^2 \leq \\ &\leq \theta (\psi_x^2 + \psi_y^2), \quad \theta = \theta(\varphi) = \max_{0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2), \\ \|\varphi, \psi\|^2 &= \int_0^l \int_0^h (\varphi_y \psi_x - \varphi_x \psi_y)^2 dx dy \leq \theta(\psi, A\psi) \leq \theta \|\psi\| \|A\psi\| \leq \\ &\leq \theta \lambda_0^{-1/2} \|A\psi\|^2 = \gamma_0^2 \|\psi\|_1^2, \quad \gamma_0 = \gamma_0(\varphi) = \lambda_0^{-1/4} \theta^{1/2}, \quad \varphi, \psi \in D(V), \end{aligned}$$

и $\theta = 1$ для $\varphi = \psi_* = \text{const} - \cos y$ ■

Как следствие рассмотренной структуры алгебры функций тока в разделе 12.1 и свойств 1–11, относящихся к операциям и главным модам и моментам волчка задачи Колмогорова, получаем следующую

теорему о глобальной устойчивости течения Колмогорова на торе (в периодической плоскости) или в кольце (периодическом канале) с условиями прилипания на твердых стенка:

При заданной перемешивающей силе $-\varepsilon \cos y$ и любом числе Рейнольдса $1/\varepsilon > 0$ в уравнении для функции тока из раздела 12.2, с главным фактором $l/h = 1/\alpha$, не превосходящим 1 для тора и обратной величины $1/\alpha_* > 2/\sqrt{3} > 1$ единственного положительного корня α_* уравнения $\lambda_{11}(\alpha_*) = 1$, или

$$\alpha_*^2 + (1/2 + \beta_*)^2 = 1, \quad \pi\beta_* = \arctg(2\alpha_* \operatorname{th}\alpha_*\pi / (1 + 2\beta_*)), \quad \alpha_*, \beta_* > 0,$$

для случая кольца с прилипанием (из раздела 12.2), течение Колмогорова $u^x = \psi_y$, $u^y = -\psi_x$, определяемое функцией тока $\psi = \psi_*$ из раздела 12.3, является единственным стационарным полем скоростей вязкой несжимаемой жидкости на торе (или периодической плоскости), при любом среднем расходе массы q , или в кольце (или периодическом канале) с условиями прилипания. Данное течение глобально устойчиво (т.е. устойчиво любых числах Рейнольдса $1/\varepsilon$) в том смысле, что любое гладкое течение на торе или в кольце, удовлетворяющее уравнению для функции тока при $t > 0$, приближается к данному стационарному решению при $t \rightarrow \infty$ с оценкой для нормы $\|\varpi\|$ разности $\varpi = \omega - \omega_*$ их завихренностей $\omega = \omega(t, x, y) = -\Delta\psi$ и $\omega_* = -\Delta\psi_* = -\cos y$ в пространстве квадратично суммируемых функций:

$$\|\varpi\| \leq \|\varpi\|_{t=0} \left(1 + \frac{\kappa}{\varepsilon\delta} (1 - e^{-\varepsilon\delta t}) \right) e^{-\varepsilon t}, \quad \varpi = \omega - \omega_*, \quad t \geq 0,$$

$$\kappa = (1 + \lambda_0^{-1})(1 - \lambda'^{-1})^{-1/2} \lambda_0^{-1/4}, \quad \delta = \lambda' - 1;$$

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda' = \begin{cases} 2 & \text{при } \alpha = 1, \\ \min\{\alpha^2, 4\} & \text{при } \alpha > 1, \end{cases} \quad \text{на торе};$$

$$\lambda_0 = \min\{1/4, \alpha^2\} \quad \text{и} \quad \lambda' = \begin{cases} \lambda_{02}, \alpha = \alpha_*, \\ \min\{\lambda_{11}, \lambda_{02}\}, \alpha > \alpha_* \end{cases} \quad \text{в кольце,}$$

$$\lambda_{11} = \alpha^2 + (b_1^1)^2, \quad \lambda_{02} = (b_0^2)^2,$$

$$\operatorname{tg} b_1^1 \pi = -\frac{\alpha \pi \operatorname{th} \alpha \pi}{b_1^1 \pi}, \quad \frac{\operatorname{tg} b_0^2 \pi}{b_0^2 \pi} = 1, \quad \frac{1}{2} < b_1^1 < 1 < b_0^2 < \frac{3}{2}.$$

◀ Действительно, в силу свойства 2 заменой $\psi \rightarrow \psi - q$ задача на торе сводится к случаю нулевого среднего расхода массы: $q = 0$. Справедливость теоремы обеспечивается тогда общими теоремами разделов 11.6 и 11.7 и свойством 11. Оценка асимптотической сходимости следует из такой же оценки в теореме из раздела 11.6. Необходимые детали конкретизируют свойства 3 – 5 и 10 ■