

Федеральная целевая программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» 2009-2013 гг., направление "Математика", мероприятие 1.2.1. Государственный контракт № П939. НГР: 1037739362550.

## Научно-популярный курс

### «Что такое гидродинамическая устойчивость»

О.В. Трошкин

#### С о д е р ж а н и е к у р с а

#### Л е к ц и я 1

Очерк 1. Закон Архимеда

Очерк 2. Барометр Торричелли и давление Паскаля

Очерк 3. Ускорение Эйлера, циклоны и антициклоны

#### Л е к ц и я 2

Очерк 4. Вихри живой природы

Очерк 5. Гидродинамические неустойчивости, или откуда берутся вихри

Очерк 6. Опыты Рейнольдса с подкрашенными струями

Очерк 7. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца

Очерк 8. Неустойчивость Тейлора

#### Л е к ц и я 3

Очерк 9. Прямое численное моделирование неустойчивостей

Очерк 10. Вихревой каскад Конохова

Очерк 11. Вихревой каскад Фортовой

#### Л е к ц и я 4

Очерк 12. Гипотеза Ричардсона и закон Колмогорова–Обухова

Очерк 13. Неустойчивость Рэлея–Тейлора

Очерк 14. Неустойчивость Рихтмайера–Мешкова

Очерк 15. Главный фактор задачи Колмогорова

#### Л е к ц и я 5

Очерк 16. Когерентные структуры

Очерк 17. Турбулентные волны

Очерк 18. Диссипация механической энергии

### Очерк 1. Закон Архимеда

Как хорошо известно, от сыпучего материала (муки, зерна, земли, песка,...) сплошную среду (воздух, воду, масло, мед,...) отличает наличие внутри нее выталкивающей силы, дополняющей оказываемое на объемы среды действие других сил. Закон Архимеда устанавливает существование этой силы при любом движении среды и ее точную величину в случае покоя.

Объектами механики жидкости и газа, или гидродинамики служат объемы сплошной среды, переносимый и деформируемый течением при сохранении его массы, импульса и энергии. Наблюдаемые масштабы движений и деформаций объемов простираются от нанометров ( $10^{-9}$  м, в жидком гелии) до гигаметров ( $10^9$  м, в компактных объектах вселенной). В подобных пограничных, или экстремальных режимах часто и сами законы сохранения нуждаются в уточнениях. Но при этом остается практически нетронутым их основное ядро – исходные положения, относящиеся к обычным воде и воздуху, которые осмысливаются вот уже на протяжении 23 веков с момента получения упомянутого первого точного закона гидродинамики – закона о величине потери веса погруженного в жидкость тела.

Как и многие законы природы, первый закон гидродинамики был открыт случайно и по причине, далекой от науки. За две с лишним сотни лет до рождения Христа на острове Сицилия, что на Средиземном море, был город-государство Сиракузы, которым управлял древнегреческий царь Гиерон. У Гиерона был ученый

родственник, астроном Фидий, а у последнего – талантливый сын, математик Архимед (287-212 г.г. до н.э.).

Однажды Гиерон попросил Архимеда разрешить его сомнения и установить истинную долю серебра в новой золотой короне. Эта задача, казалось бы, не должна была смутить Архимеда. Серебро легче золота, а значит сплав этих двух металлов будет больше по объему равного ему по весу, но более плотного золотого слитка. Объемы же тел уже давно научились измерять количеством вытесненной жидкости. Сравнив такие количества для равных по весу сплава серебра и золота, с одной стороны, и чистого золота, с другой стороны, можно определить искомую долю серебра в первом.

Между тем по преданию Архимед долго размышлял над этим казалось бы простым решением. Причиной оказалась таинственная потеря в весе погружаемого в воду тела. Неизвестной же величиной всегда мог воспользоваться оппонент, истолковав ее в свою пользу. Поэтому загадочную поправку на потерю веса при его погружении необходимо было если не объяснить, то хотя бы измерить. Искомая поправка была, наконец, получена Архимедом в виде правила: погруженное тело теряет в весе ровно на величину веса вытесненной им жидкости. Это правило и оказалось первым точным законом механики сплошных сред.

Но откуда берется сама выталкивающая сила?

## **Очерк 2. Барометр Торричелли и давление Паскаля**

Природу выталкивающей силы подсказывает многовековой опыт домашних хозяек: чтобы выбрать легкий сор из муки, надо потрясти чашку с мукой. И тогда в муке возникнет сила, которая и вытолкнет легкие частицы на поверхность.

Иначе говоря, мука становится похожей на воду или воздух благодаря мелкомасштабному движению своих частиц. В реальной среде такими частицами служат молекулы или их скопления – кластеры. Наблюдаемые течения сплошной среды – результат коллективного движения ее микроскопических составляющих. При этом единственное, что остается от их мелкомасштабных пульсаций в любом (сколь угодно малом) объеме среды – это внутренняя энергия объема. Пропорциональная ей сила, приходящаяся на единицу поверхности, или молекулярное давление среды и составляет основу выталкивающей силы.

Давление атмосферы первым измерил Эванджелиста Торричелли, открыв, что воздух, как и вода, тоже давит вниз, только – с меньшей силой («мы находимся на дне воздушного океана»), достаточной, однако, чтобы удерживать столбик ртути высотой примерно 760 миллиметров в запаянной сверху стеклянной трубке изобретенного им барометра, шкалой которого мы пользуемся до сих пор.

Повторив опыты Торричелли, Блез Паскаль нашел неожиданное объяснение выталкивающей силе: она направлена вверх именно потому, что вода и воздух и давят вниз. Иначе говоря, сплошная среда давит во все стороны без изменения.

Вернемся к закону Архимеда. На верхнюю и нижнюю грань вертикально погруженного бруска давит сверху столб воды или воздуха, с разницей в силе, равной, как очевидно, весу данной сплошной среды, которая заполняла бы объем бруска при его отсутствии. Сама же сила при этом определяется произведением давления на площадь грани. На верхнюю грань, следовательно, действует меньшая сила по сравнению с силой, действующей на нижнюю грань равной площади. Разница сил, таким образом, оказывается направленной вверх, противоположено силе тяжести, выталкивая брусок и тем самым ослабляя его вес.

### Очерк 3. Ускорение Эйлера, циклоны и антициклоны

Как выяснилось в последствии, в действительности выталкивающая сила никак не связана с силой тяжести или какой-либо другой известной силой. Она существует сама по себе, выделяя гидродинамику в отдельный раздел физики (науки о силах).

Эта сила порой достигает огромной величины. Например, в стихийном атмосферном вихре (торнадо) она способна втянуть в воронку нагруженный вагон, скрутив попутно в серпантин железнодорожный рельс.

Она же используется в промышленной центрифуге для разделения изотопов урана.

В эпоху, предшествовавшую чаю в пакетах, ее можно было наблюдать повсеместно. Помешивая ложкой чай в чашке с плавающими у дна чайнками и сейчас всегда можно удивляться тому, как вопреки ожидаемому разбеганию к стенкам (как на карусели) чайнки начинают скапливаться у центра вращения.

Попытки объяснить это скопление другими силами, включая гидродинамические (например, – силу Корриолиса, размывающую один из двух берегов рек), оказались неудачными. При замене чашки с чайнками на заполненную водой стеклянную бутылку, взбалтываемую круговым вращением вокруг вертикальной оси, со взвешенными в ней мелкими клочками бумаги, можно убедиться в том, что никаких посторонних движений у клочков бумаги не возникает: они исправно скапливаются у центральной оси вращения равномерно по всей высоте вращаемой среды.

Объяснение опытам с поднимаемыми вагонами, закручиваемыми, рельсами, разделяемыми изотопами и взвешенными чайнками в чашке чая или клочками бумаги в бутылке с водой подсказывает характерное свойство выталкивающей силы: она противодействует какому-то

внутреннему действию. Во всех рассмотренных случаях им оказывается новая сила сплошной среды, приложенная к жидкой частице (бесконечно малому объему среды), которая впоследствии была названа конвективной.

Величину и направление ускорения, сообщаемого конвективной силой, открыл Леонард Эйлер: вектор конвективного ускорения равен скорости изменения вектора скорости жидкой частицы вдоль ее траектории.

Им же было установлено условие динамического равновесия движения сплошной среды. Для случая ее установившегося движения в отсутствие внешних сил оно предполагает равенство векторов конвективного ускорения частицы и ускорения, сообщаемого ей выталкивающей силой. Последнее при этом определяется отнесенным к плотности отрицательным вектором градиента изотропного давления Паскаля (обратной скоростью изменения давления вдоль радиус-вектора частицы).

Именно равновесием конвективной силы Эйлера и выталкивающей силы давления Паскаля и объясняется притягивание к оси вращения взвешенных тел: как следствие этого равновесия, давление несжимаемой жидкости всегда падает к центру вращения и растет к центру седла – простейшим иллюстрациям атмосферных циклона и антициклона (Рисунок 16).

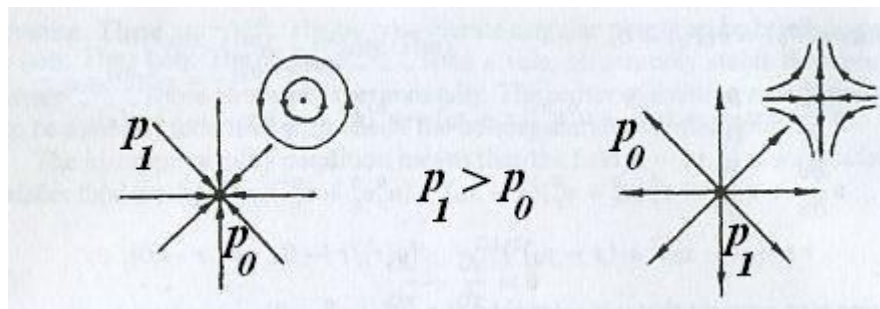


Рисунок 16 – Локальное давление всегда падает к центру вихря (центру циклона) и растет к седловой точке (центру антициклона), что следует из равновесия конвективной силы Эйлера и выталкивающей силы давления Паскаля.

## Л е к ц и я 2

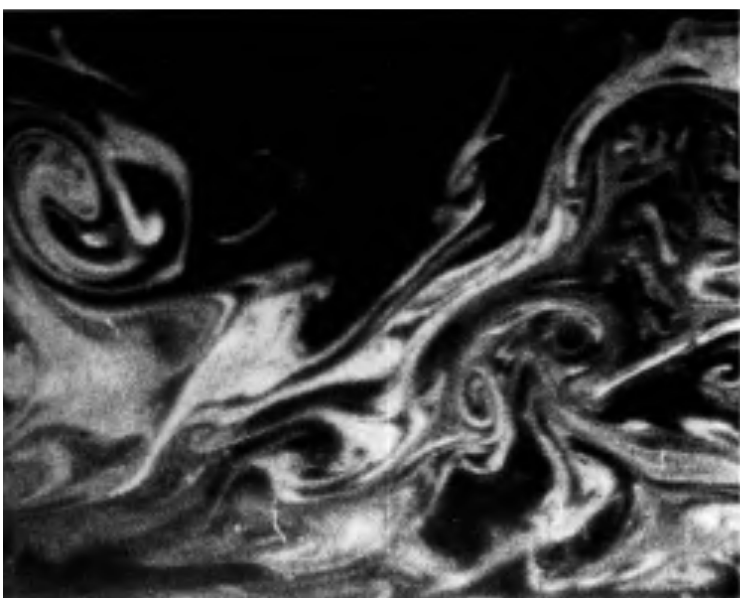
### Очерк 4. Вихри живой природы

Вихри, т.е. вращения среды вокруг условной оси (которой, вообще говоря, может служить любая кривая в пространстве), как правило, и составляют движение сплошной среды в естественных условиях. В пограничном слое у обтекаемой поверхности их возникает целое множество: кольца, подковы, жгуты, протуберанцы, ... (Рисунок 17).

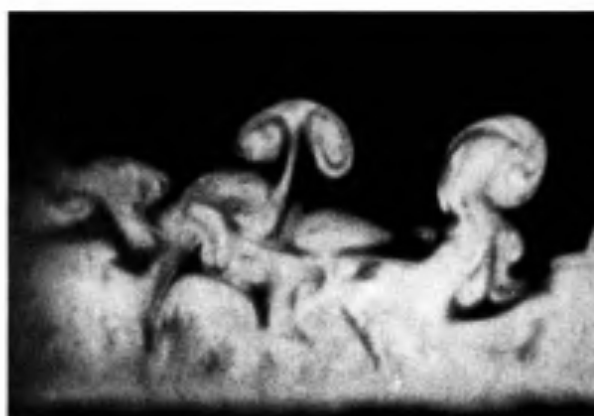
Возникнув за обтекаемыми кромками крыла птицы или хвоста рыбы (Рисунок 18), они способны оторваться от поверхности, устремляясь по потоку и унося с собой массу среды, до отрыва, заполнявшую с телом общий объем. Как следствие, телу сообщается реактивный импульс навстречу потоку. Только благодаря этому импульсу и может летать и плавать все живое, что летает и плавает.

Главное при этом – это правильным взмахом крыла (у тех, кто летает) или хвоста (у тех, кто плавает) создать (взмахом вверх) и затем отрезать от себя (взмахом вниз) вихрь, сносимый потоком.

У Шмеля относительно крупное тело и крохотные крылья. Ни о какой подъемной силе для него не может идти и речи. Исходя из здравого смысла, он не может летать. Но он летает, причем, легко, и боком и спиной навстречу потоку (Рисунок 19). Только благодаря отрыву вихрей.



162. «Типичный вихрь» в турбулентном пограничном слое. Масляный туман освещается лазерным световым ножом, чтобы показать сбоку нижние две трети турбулентного пограничного слоя. Структура типа вихревого кольца справа чуть ниже и правее центра снимка, напоминающая разрезанный и наклонившийся влево гриб, дает пример того, что Фалько назвал «типичным вихрем». Его размеры соответствуют скорее пристеночному масштабу длины (фото 161), чем толщине пограничного слоя. Фото R. E. Falco

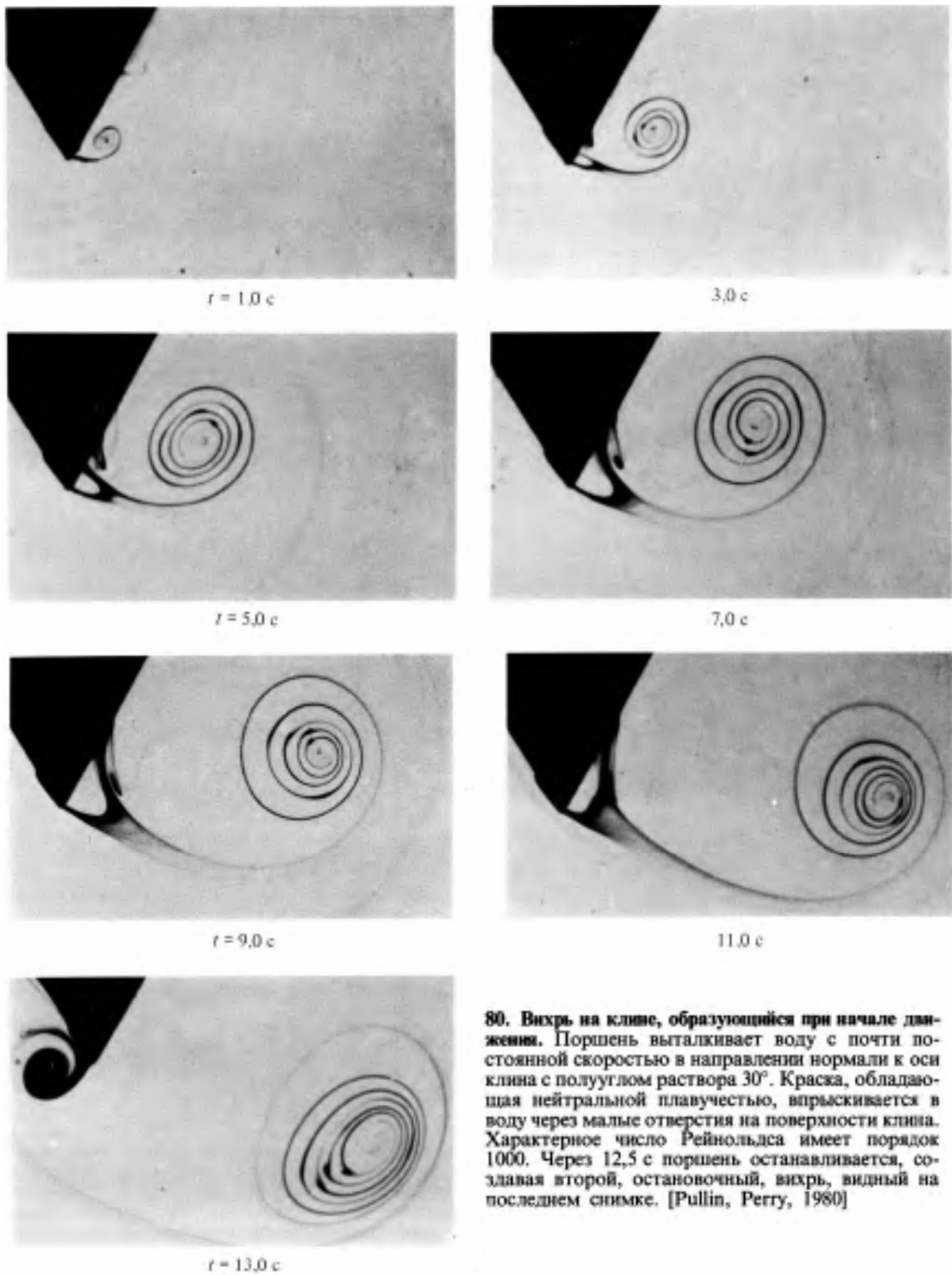


163. Косые поперечные сечения турбулентного пограничного слоя. Течение рассматривается спереди и визуализируется дымом, освещаемым световым ножом, который имеет наклон  $45^\circ$  вниз по потоку от стенки (левые снимки) и  $45^\circ$  вверх по потоку

(правые снимки). Число Рейнольдса, рассчитанное по толщине потери импульса, равно 600 для верхней пары снимков и 9400 – для нижней. [Head, Bandyopadhyay, 1981]



Рисунок 17 – Слой, прилегающий к обтекаемой поверхности (пограничный слой), как правило, служит источником вихрей.



80. Вихрь на клине, образующийся при начале движения. Поршень выталкивает воду с почти постоянной скоростью в направлении нормали к оси клина с полууглом раствора  $30^\circ$ . Краска, обладающая нейтральной плавучестью, впрыскивается в воду через малые отверстия на поверхности клина. Характерное число Рейнольдса имеет порядок 1000. Через 12,5 с поршень останавливается, создавая второй, остановочный, вихрь, видимый на последнем снимке. [Pullin, Perry, 1980]

Рисунок 18 – Отрывной вихрь за обтекаемой кромкой, созданный в лабораторных условиях. У птицы (рыбы) он производится взмахом ее крыла (хвоста) и – гораздо быстрее.

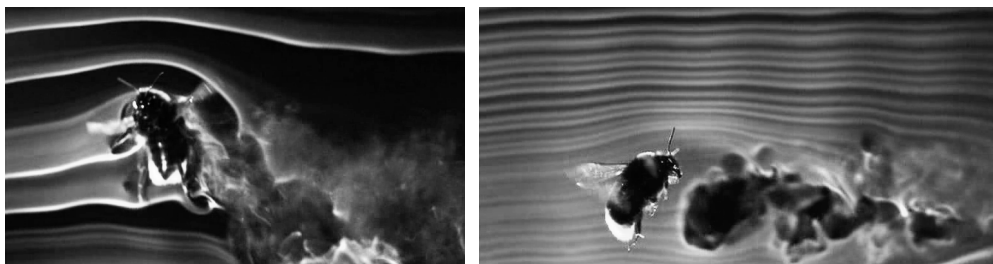


Рисунок 19 – Шмель летает только благодаря реактивной силе создаваемых им отрывных вихрей.

## **Очерк 5. Гидродинамические неустойчивости, или откуда берутся вихри**

Равновесием сил Эйлера и Паскаля в сплошной среде можно объяснить и многообразие наблюдаемых картин течений: от простого протекания до каскада водопада.

Несмотря на свое различие, течения одной и той же среды в одной и той же области пространства связаны между собой физическим явлением, имя которому «гидродинамическая неустойчивость».

Основная функция гидродинамической неустойчивости заключается в том, чтобы в режиме реального времени расположить картины течений в ряд, где каждое последующее течение в какой-то момент времени разрушается (теряет устойчивость) и возникает новое поле скоростей.

Характерным свойством такого процесса служит увеличение числа вихрей, или новых центров вращения среды, возникающих в очередной картине течения, приходящей на смену предыдущей.

Первый член этого ряда, как правило, не содержит вихрей. Его традиционно называют основным течением. Каждый последующий член при этом выступает в роли вторичного течения по отношению к предыдущему. Все достаточно удаленные члены этого ряда, с большим числом центров вращения, и относят обычно к турбулентным.

## **Очерк 6. Опыты Рейнольдса с подкрашенными струями**

Условие возникновения гидродинамического ряда неустойчивостей (включая его «хвост» – турбулентность) было получено Осборном Рейнольдсом в его знаменитых опытах с подкрашенными струями (Рисунок 20). Этим условием оказалось превышение открытым им числом некоторого критического значения.

Число Рейнольдса – это отношение произведения характерных величины скорости потока и размера области течения к коэффициенту кинематической вязкости среды. Последним служит коэффициент динамической вязкости, отнесенный к плотности.

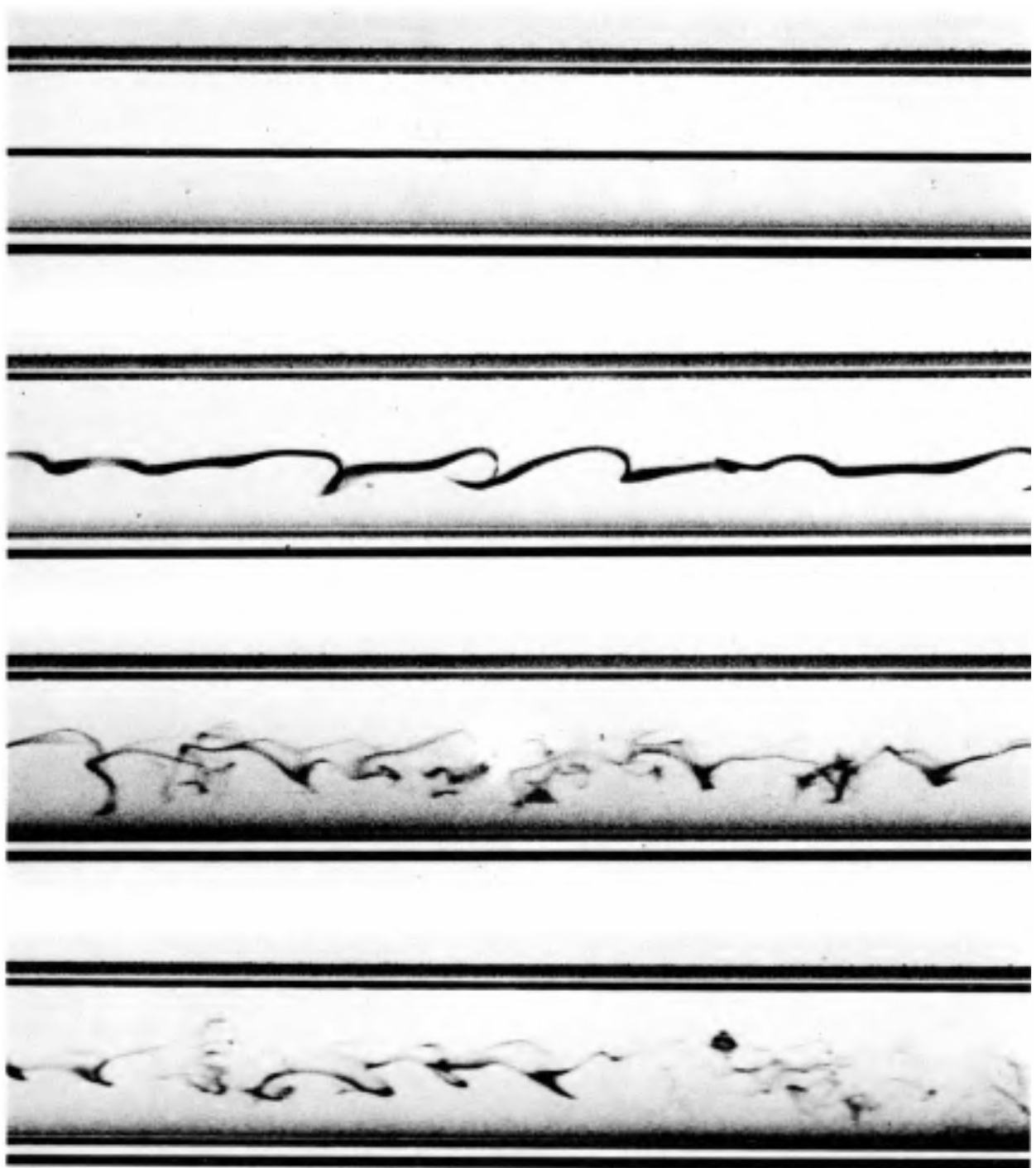
Формулу силы вязкости среды угадал еще Исаак Ньютон. Согласно Ньютону, вязкость создает трение смещаемого слоя среды о поверхность соседнего слоя или границы. Пограничный слой, как правило, прилипает к твердой поверхности. Как и давление, трение соседних слоев среды при этом производится ее микрочастицами (молекулами или их кластерами). Удаляемые друг от друга, они уже не расталкиваются, а притягиваются друг к другу. Если на мгновение представить себе параллельные, или ламинарные слои плотно уложенными листами фанеры, то потянув верхний слой, мы вызовем смещение следующего за ним внутреннего слоя, который будет в свою очередь увлекать за собой третий слой, и т.д.

Об усилении, затрачиваемом на преодоления возникающей силы трения между соседними слоями теперь нетрудно догадаться: с

точностью до знака его величина пропорциональна градиенту скорости, т.е. скорости падения по нормали (в ортогональном направлении) величины скорости смещения листа (скорости потока). Коэффициентом пропорциональности в указанной формуле Ньютона и оказывается коэффициент динамической вязкости среды.

Клод Навье, Сен-Венан и Стокс распространили формулу Ньютона на произвольные (сколь угодно малые) объемы среды. В результате она оказалась дополнительным слагаемым конвективной силы Эйлера, необходимым для уравнивания силы давления Паскаля в реальной, т.е. вязкой среде.

Эффект поправки на силы вязкости и характеризует число Рейнольдса. Образно выражаясь, последнее служит тем ключом зажигания, который включает стартер – гидродинамическую неустойчивость, а тот в свою очередь запускает двигатель – турбулентность.



103. Повторение эксперимента Рейнольдса с краской. Знаменитое исследование устойчивости течения в трубе, проведенное Осборном Рейнольдсом в 1883 г., было документировано не фотографиями, а рисунками. Однако в Манчестерском университете сохранилась сама экспериментальная установка. Воспользовавшись ею столетием позже, Йоханнесен и Лоу сделали приводимую здесь серию фотографий. Струйка подкрашенной воды,

вводимая в ламинарный поток во входной части, имеющей колоколообразную форму, остается невозмущенной по всей длине стеклянной трубки. На втором снимке, когда скорость возросла, уже виден переход; на двух последних снимках показано вполне развитое турбулентное течение. Из-за уличного движения в современном Манчестере критическое число Рейнольдса оказалось ниже значения 13 000, которое получил сам Рейнольдс.

Рисунок 20 – Повторение опытов Рейнольдса спустя век на его экспериментальной установке, проиллюстрированное и прокомментированное на с. 63 известного альбома М. Ван-Дайка «Альбом течений жидкости и газа». Термин «ламинарное течение» иллюстрирует первый (верхний) снимок: все линии тока, включая подкрашенную струю, параллельны.

## **Очерк 7. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца**

В опытах с покрашенными струями был найден ключ (число Рейнольдса) и показан двигатель (разрушающая струю турбулентность), но остался необъясненным стартер – разнообразные и разнокалиберные вихри неустойчивости, возникающие в пограничном слое. Именно их невидимое присутствие в указанных опытах сначала искривляет, а затем и разрушает подкрашенную струю.

С другой стороны, для объяснения действия числа Рейнольдса существует правило ламинарного подслоя: скорость потока в пределах узкой полосы, непосредственно примыкающей к обтекаемой поверхности, обращается в нуль на поверхности (условие прилипания), а ее величина возрастает в глубину потока по линейному закону, с коэффициентом, пропорциональным числу Рейнольдса.

Вероятно, гидродинамик сказал бы лаконичнее: ламинарный подслой есть сдвиговый слой с невозмущенным течением Куэтта. Неустойчивость течения Куэтта в ламинарном подслое при большом градиенте скорости, или, что одно и то же, при большом числе Рейнольдса и приводит к возникновению вихрей.

Первые вихри сдвигового слоя доставляет неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, в которой основной поток из параллельных слоев при большом градиенте скорости сворачивается в поперечные

вихревые рулоны (Рисунок 21). Оси вращения вторичных вихрей здесь расположены поперек потока.



146. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца наложенных потоков. Нижний поток воды движется влево быстрее, чем верхний. Вода содержит краску, которая флуоресцирует при освещении вертикальным лазерным световым ножом. Более быстрый поток получает синусоидальные возмуще-

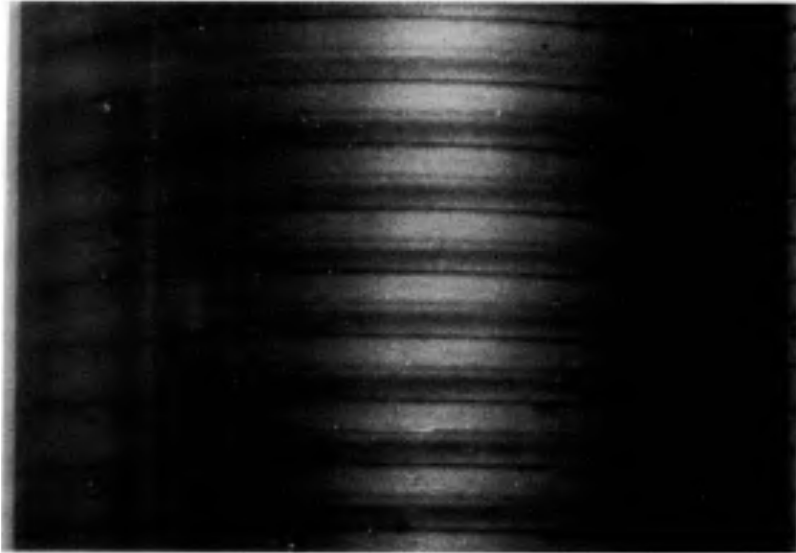
ния с наиболее неустойчивой частотой (верхний снимок) или с вдвое меньшей частотой (нижний снимок), так что движение выходит на субгармонику. Фото Ф. А. Робертс, Р. Е. Димотакис, А. Рашко

Рисунок 21 – Вихри неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, возникающие вращающимися поперек основного потока (течения Куэтта). Альбом Ван–Дайка, с. 87.

### Очерк 8. Неустойчивость Тейлора

В течении Куэтта между цилиндрами, где жидкость увлекается вращением одного из них (за счет условий прилипания), возникают вихри Тейлора: в отличие от вихрей Кельвина–Гельмгольца, их оси вращения расположены вдоль потока (Рисунок 22).

**127. Осесимметричные ламинарные вихри Тейлора.** Машинное масло, содержащее алюминиевый порошок, заполняет зазор между неподвижным внешним стеклянным цилиндром и вращающимся внутренним металлическим цилиндром с относительным радиусом 0,727. Торцовые пластинки сверху и снизу неподвижны. Скорость вращения в 9,1 раза больше той, для которой Тейлор предсказывает возникновение регулярно расположенных тороидальных вихрей, видимых на снимке. Радially компонента скорости течения направлена внутрь на более широких темных горизонтальных кольцах и наружу – на более узких. Движение началось внезапно, при этом создаются вихри более узкие, чем те, которые получаются при плавном начале движения. [Burkhalter, Koschmieder, 1974]



**128. Ламинарные вихри Тейлора в узком зазоре.** Внутренний цилиндр большего радиуса в той же установке соответствует относительному радиусу, равному 0,896. Как и прежде, вращается только внутренний цилиндр. На верхнем снимке показана центральная область осесимметричных вихрей при скорости вращения, в 1,16 раза превышающей критическую. На нижнем снимке при скорости вращения, в 8,5 раза большей критической, течение оказывается двоякопериодическим с шестью волнами по окружности вихрей, дрейфующими при вращении. [Koschmieder, 1979]



Рисунок 22 – Вихри неустойчивости Тейлора, возникающие вращающимися вдоль основного потока (течения Куэтта).



## Очерк 9. Прямое численное моделирование неустойчивостей

При всем многообразии математических подходов, численных и натуральных экспериментов все еще остаются невыясненными вопросы, касающиеся «гаек и болтов» механики неустойчивости.

Почему параллельным слоям ламинарного потока с большим градиентом скорости «выгоднее» свернуться в рулон?

И как будет расположен этот рулон: поперек или вдоль потока?

Как формируются следующие за первыми вторичные вихри неустойчивостей?

Самый трудный из этих трех вопросов – первый. На него пока нет ответа, хотя ряд интересных мыслей можно найти уже в «Математических началах натуральной философии» И. Ньютона. Например, читаем у него: «Всякое движение, распространяющееся через жидкость, отклоняется от прямого пути в области, занятые неподвижной жидкостью» (Книга II, Отдел VIII, Предложение XLII, Теорема XXXIII).

Ответ на второй вопрос неоднозначен: в неустойчивости Кельвина–Гельмгольца оси вращения вторичных вихрей направлены поперек основного потока, в неустойчивости Тейлора – вдоль него.

Остается третий вопрос, на который ответ может быть получен с помощью вычислительного эксперимента, т.е. путем прямого численного моделирования основного закона равновесия силы изотропного давления Паскаля и конвективной силой Эйлера, с поправкой на внутреннее трение Ньютона, Навье, Сен–Венана и Стокса, а также дополненного законами сохранения массы и энергии для бесконечно малого объема, а также так называемым уравнением

состояния, в котором, как и в обычной сжимаемой среде, давление пропорционально произведению плотности и температуры.

Делается это так. Бесконечно малый объем приближается конечным, для которого также приближаются, с требуемой точностью, все законы сохранения, записанные в виде уравнений с производными (скоростями изменения) неизвестных величин по координатам и времени. Значения координат и времени из непрерывных при этом становятся дискретными. Способом, при помощи которого осуществляется приближение точных законов, служит вычислительная схема, или численный метод, выбранные для решения, т.е. получения полей (распределений по точкам пространства) 5-ти неизвестных: плотности, давления и 3-х компонент скорости.

Результатом применения численного метода оказывается система алгебраических уравнений, решаемых при переходе от очередного момента времени движения к следующему за ним. Указанная система уравнений затем кодируется в набор из последовательных арифметических действий и передается процессорам вычислительного комплекса. Рассчитанные поля графически обрабатываются, что и дает в итоге искомое решение в виде картины течения с распределенными плотностью, давлением и температурой среды, отвечающие исходным законам сохранения.

Нижеследующие ответы на третий вопрос (о развитии первых вихрей неустойчивости), полученные прямым численным моделированием законов сохранения, относятся непосредственно к вихрям сдвигового слоя.

## **Очерк 10. Вихревой каскад Конюхова**

Промоделированное в каскаде А.В. Конюхова (Рисунок 23) развитие неустойчивостей было приближено к реальному эксперименту,

изображенному на Рисунке 21. В начальный момент на общей границе встречались два потока: на одной половине расчетного гексаэдра среда текла вдоль ребра с постоянной скоростью в одну сторону, на второй половине – в другую.

Целью эксперимента служило проверка гипотезы О.М. Белоцерковского и А.М. Опарина: если турбулентность – результат развития гидродинамических неустойчивостей, то основным механизмом этого развития служит равновесие сил Эйлера и Паскаля.

Поэтому для чистоты эксперимента из расчетов была исключена вязкость. Начальное течение с контактным разрывом возмущалось простым (синусоидальным) колебанием поля скоростей. Развитие неустойчивости приведено (с описанием) на Рисунке 23.

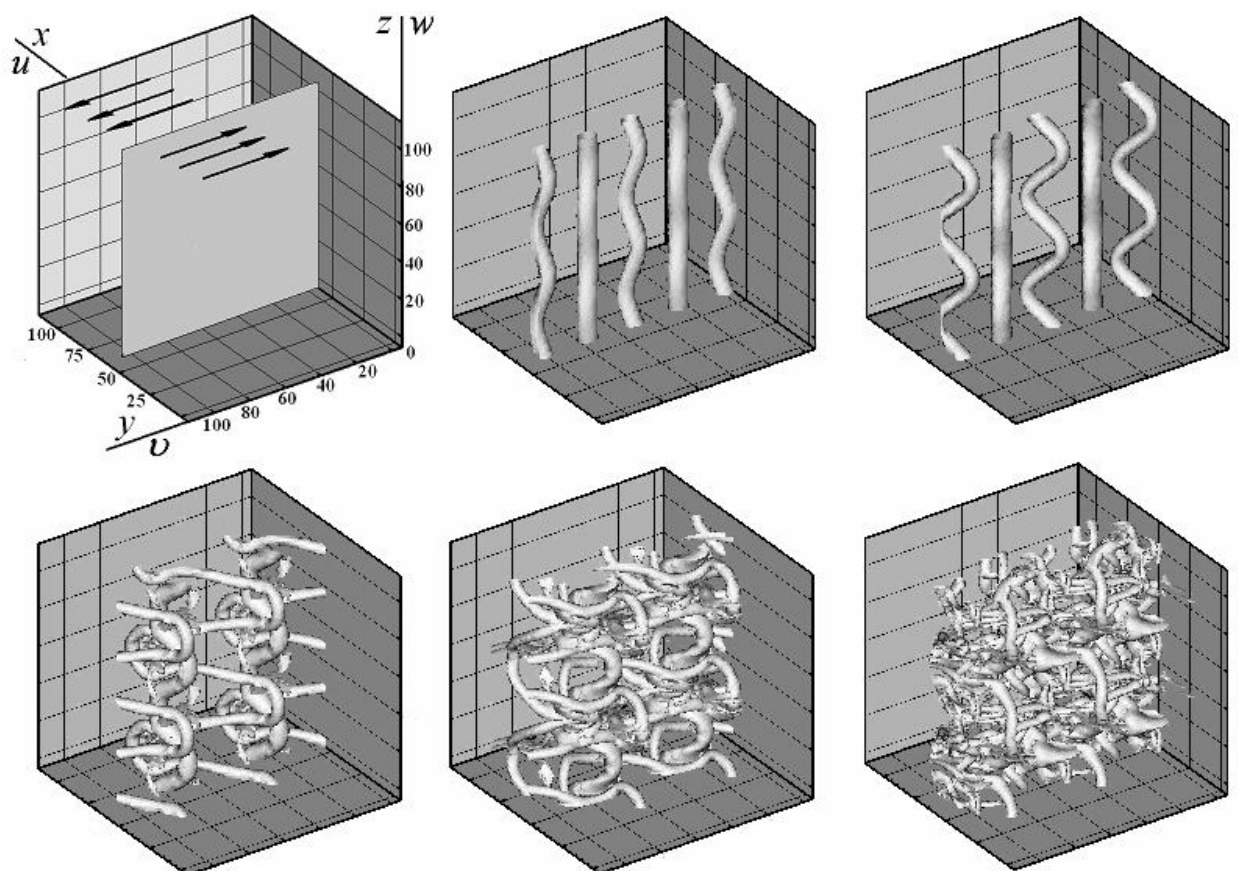


Рисунок 23 – Вихревой каскад Конюхова, полученный прямым численным моделированием равновесия сил Эйлера и Паскаля в неустойчивости Кельвина–Гельмгольца для сдвигового слоя с контактными разрывами. Возникающие первоначально вихри этой неустойчивости в виде трубок затем начинают делиться, искривляться, растягиваться и запутываться, заполняя собой свободные участки ламинарного течения.

### Очерк 11. Вихревой каскад Фортовой

На каждой поперечной вихревой трубке развивающейся неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (Рисунки 21 и 23) при этом может происходить возникновение обрамляющих ее продольных вихревых колец, как в неустойчивости Тейлора (Рисунок 22), что иллюстрирует вихревой каскад С.В. Фортовой (Рисунок 24).

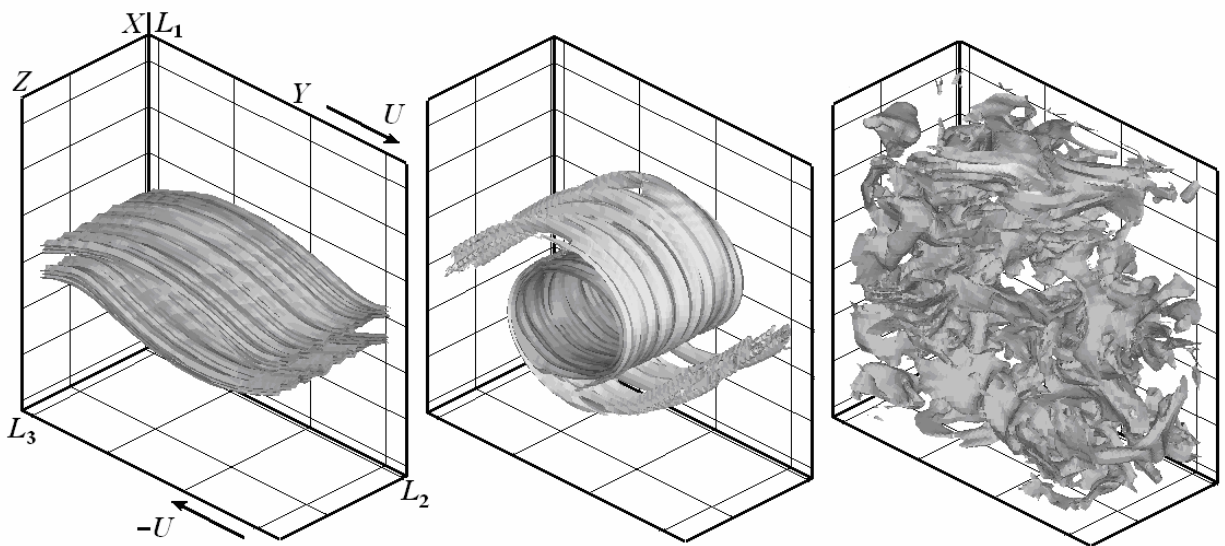


Рисунок 24 – Вихревой каскад С.В. Фортовой, полученный прямым численным моделированием равновесия сил Эйлера и Паскаля в

неустойчивости Кельвина–Гельмгольца для сдвигового слоя с основным течением Куэтта и простым начальным возмущением в узкой центральной полосе. Вокруг каждой вихревой трубки возникают обрамляющие ее продольные вихревые кольца, как в неустойчивости Тейлора (Рисунок 22). Как и в каскаде Конюхова, неустойчивости приводят к турбулентности.

## Лекция 4

### Очерк 12. Гипотеза Ричардсона и закон Колмогорова–Обухова

Во всех вихревых каскадах, полученных в результате прямого численного моделирования законов сохранения, выделяется так называемый инерционный участок спектра энергии пульсаций.

Приведем необходимые пояснения.

Вычтем вектор скорости основного (невозмущённого) течения из вектора течения, рассчитываемого в заданный момент времени. В результате получим его пульсацию. Половина ее скалярного квадрата дает удельную (отнесенную к плотности среды) энергию пульсаций.

Следуя У.Томсону (лорду Кельвину), разложим энергию пульсаций в ряд Фурье по модам, т.е. приблизим ее конечной суммой пропорций мод: синусов и косинусов произведений координат на волновые числа, а также произведений таких синусов и косинусов.

Напомним, что волновое число – это кратное натуральному числу (1, 2, ...) отношению удвоенное произведение числа пи (3.14159...) к длине соответствующего координатного ребра гексаэдра, где рассматривается течение (Рисунки 22 и 24).

Коэффициенты разложения энергии пульсаций по модам Фурье определяют доли энергии, приходящиеся на эти моды. При этом

крупные вихри доставляют коэффициенты (или доли) энергии первым волновым числам, а самые мелкие – последним.

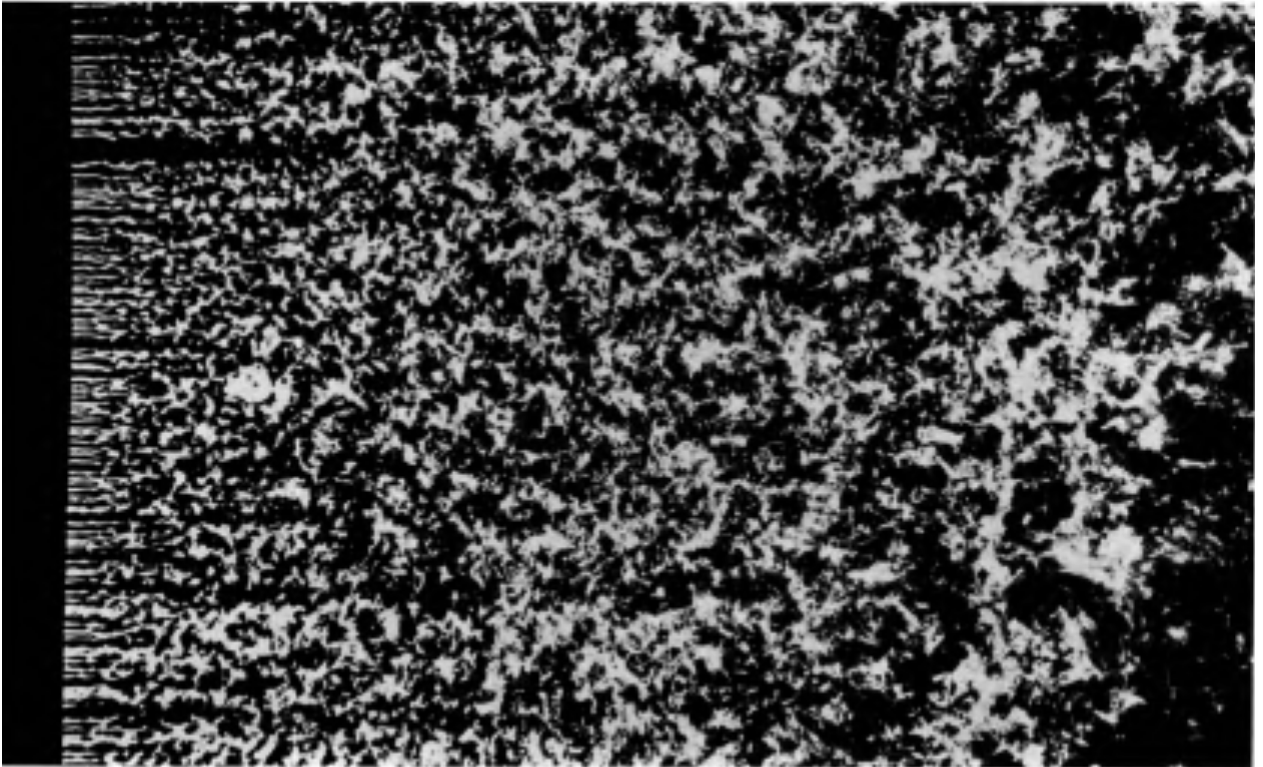
Энергия крупных вихрей – это энергия их генерации, т.е. производства вихрей в результате потери устойчивости основного течения и возникновения нового поля скоростей.

Энергия мелких вихрей – это энергия диссипации, т.е. затухания движения мелких вихрей, в результате которого механическая энергия переходит в тепло (к ней мы еще вернемся).

Согласно гипотезе Ричардсона гидродинамический ряд неустойчивостей в своем развитии выходит на стационарное непрерывное распределение энергии пульсаций по волновым числам с двумя участками ее генерации и диссипации, соответственно, и третьим участком, расположенным между первым и вторым. На этом – теперь называемом инерционным – участке спектра энергия не производится и не затухает, но передается от более крупных вихрей к менее крупным.

Типичную реализацию инерционного участка дает картина течения за решеткой (Рисунок 25). Измельчение ее структуры описал А.Н. Колмогоров: «С энергетической точки зрения процесс турбулентного перемешивания естественно представлять себе так: пульсации первого порядка поглощают энергию осредненного движения и передают ее последовательно пульсациям более высоких порядков, энергия же самых мелких пульсаций рассеивается в тепловую благодаря вязкости».

Это описание находится в полном соответствии с гипотезой Ричардсона. Оно же подкрепляется открытым А.Н. Колмогоров и А.М. Обузовым универсальным законом инерционного участка спектра, согласно которому рассматриваемая на логарифмических шкалах зависимость энергии от волнового числа в пределах инерционного участка приближается прямой, падающей с наклоном  $-59^{\circ}$ , или, точнее, с тангенсом этого угла, равным  $-5/3$ .



153. Однородная турбулентность за решеткой. За решеткой более частой, чем на предыдущем снимке, сливающиеся неустойчивые следы быстро образуют однородное поле. По мере затухания

вниз по потоку это поле становится полезным приближением идеализированной модели изотропной турбулентности. Фото Thomas Corke, Hassan Nagib

91

Рисунок 25 – Реализация инерционного участка: течение за решеткой.

### Очерк 13. Неустойчивость Рэля–Тейлора

Универсальность закона Колмогорова–Обухова, проверенная многочисленными опытами и вычислениями, может быть проиллюстрирована не связанной со сдвиговым слоем или течением за решеткой неустойчивостью границы раздела тяжелой среды над легкой, или неустойчивостью Рэля–Тэйлора.

Проведенное для этого случая С.В. Фортовой прямое численное моделирование законов сохранения выявляет и здесь отсутствие у формирующего этот закон вихревого каскада зависимости от вязкости (Рисунок 26).

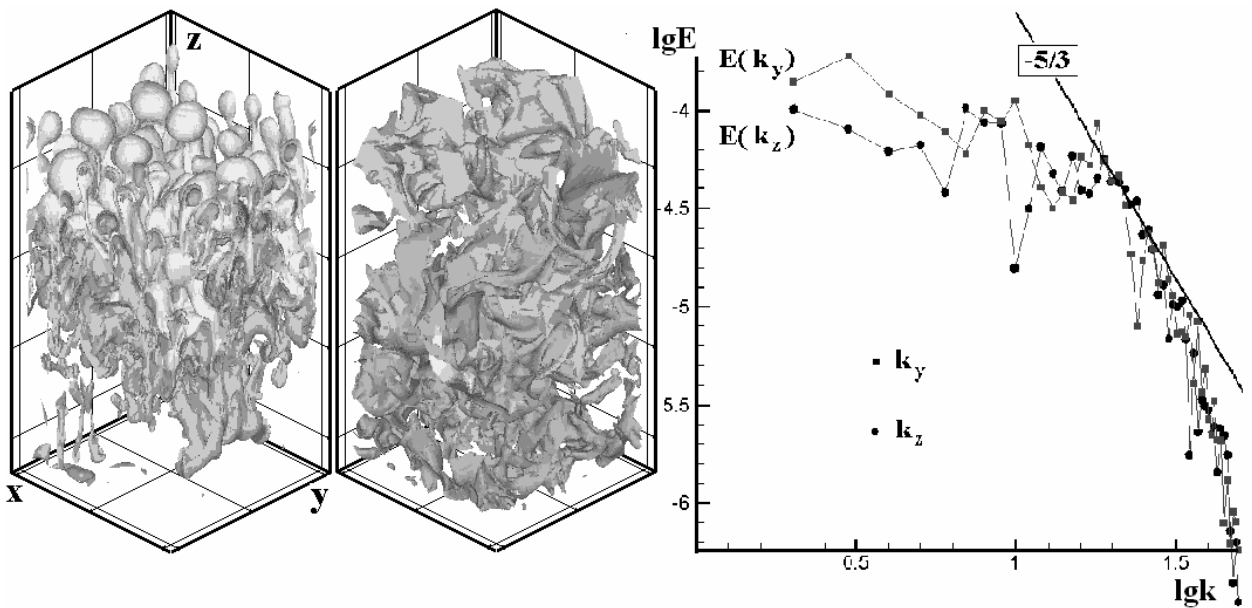


Рисунок 26 – Развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора, как вихревой каскад, с установлением закона Колмогорова–Обухова, полученный в численных экспериментах С.В. Фортовой.

#### Очерк 14. Неустойчивость Рихтмайера–Мешкова

Задача Рэлея–Тейлора как–бы разбивает многообразие задач об устойчивости на два класса тем, что ее граница раздела не разделяет скорости потока.

Между тем, первый класс указанных задач включает как рассмотренный выше сдвиговый слой, как «плавную» границу раздела, пусть, с крутым, но непрерывным изменением скорости течения Куэтта, так и служившую первоначально исходной задачу Кельвина–Гельмгольца, где этот слой неограниченно сужается до плоскости, при переходе через которую испытывает скачок касательная составляющая скорости.

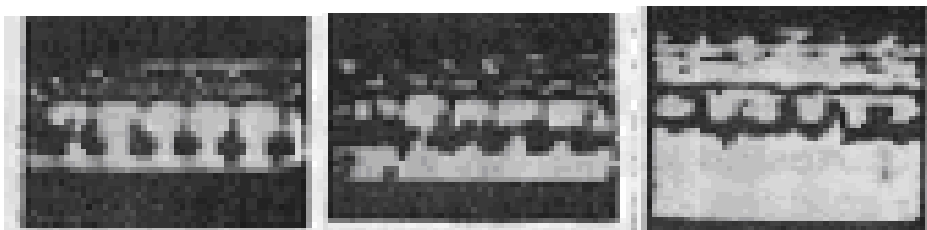
Во втором же классе задач об устойчивости на границе раздела круто меняется (либо разрывается) уже не касательная, а нормальная составляющая скорости потока.



Решение такой задачи для несжимаемой жидкости всегда можно наблюдать с борта суда в тихой гавани, когда набегающие на борт мелкие волны, отражаются от стенки, оставляя за собой череду вихревых пар, напоминающих протуберанцы в форме грибов, типичных для пограничного слоя (Рисунок 17). Только теперь эти грибы «растут» к стенке (а не от нее, как в пограничном слое).

В момент удара гребня волны о борт судна, как очевидно, рвется именно нормальная компонента скорости течения, поскольку при отражении волны вектор ее скорости меняется на противоположенный.

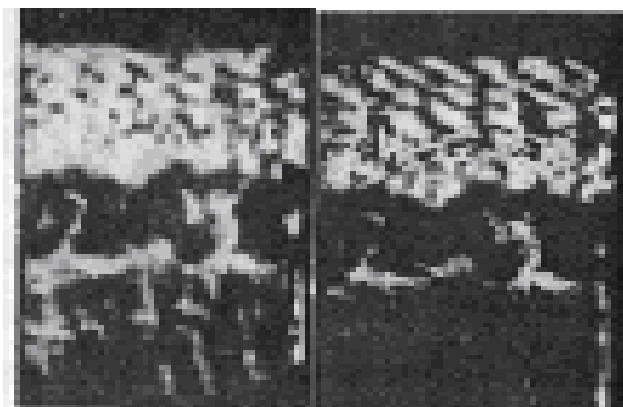
В газе подобный эффект дают ударные волны – скачки уплотнения, перемещающиеся со сверхзвуковой скоростью. Возникновение турбулентности за ударной волной при определенных условиях было предсказано в 1960 году Р.Д. Рихтмайером (R. D. Richtmyer). Но только спустя 9 лет оно было открыто Е.Е. Мешковым.



40 $\mu$ s

50 $\mu$ s

100 $\mu$ s



170 $\mu$ s

200 $\mu$ s

Рисунок 27 – Натурные съемки прохождения фронта ударной волны сквозь границу раздела аргона и ксенона спустя 40, 50, 100, 170 и 200 микросекунд. Видно, как на границе раздела возникает вихревой каскад, развивающийся в турбулентность.

Живая легенда теории гидродинамической устойчивости, Евгений Евграфович Мешков ныне заведует лабораторией Гидродинамики в Саровском филиале МИФИ.

### **Очерк 15. Главный фактор задачи Колмогорова**

На гипотезу Ричардсона, закон Колмогорова–Обухова и вихревые каскады непосредственно не влияет исходное число Рейнольдса. Как уже отмечалось, последнее существенно только для первых членов ряда неустойчивостей. В 1961 году математики Л.Д. Мешалкин и Я.Г. Синай открыли, что в двумерном периодическом слое вязкой несжимаемой жидкости, критерий числа Рейнольдса (когда при переходе его через критическое значение, основное течение теряет устойчивость) перестает «работать», если отношение периода канала к его высоте не превосходит 1.

В этом случае основное течение, порождаемое заданной внешней массовой силой одной моды Фурье (синуса в вертикальном направлении), так называемое течение Колмогорова остается устойчивым при любой (сколь угодно большой) величине соответствующего числа Рейнольдса.

Впоследствии (спустя 26 лет) из области математики (требование периодичности по высоте канала) этот результат был продолжен в область математической гидродинамики (выполнение условия прилипания на стенках канала). Критическое значение главного

фактора (влияющее на глобальную устойчивость) при этом несколько повысилось, но вывод об устойчивости не изменился.

В 70-х годах С.О. Белоцерковским была проведена достаточно полная серия вычислительных экспериментов, по моделированию вторичных течений задачи Колмогорова в области закритических значений главного фактора (превосходящих 1). Результаты вычислений совпали с натурными экспериментами (Рисунок 28), но никаких течений, кроме крупных вихрей (стационарных или периодических), они не принесли (если не считать полученного при этом главного теоретического результата: турбулентность – существенно трехмерное явление).

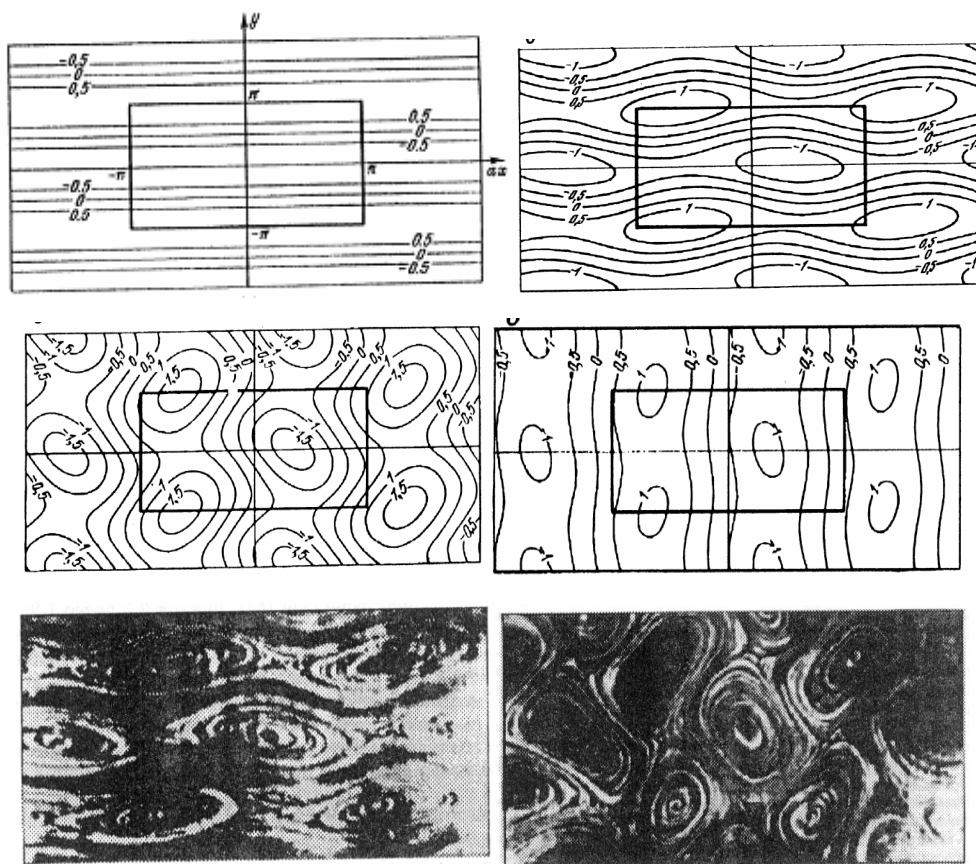


Рисунок 28 – Основное (невозмущенное) течение Колмогорова (левый рисунок верхнего ряда), вихри вторичных течений (правый рисунок верхнего ряда и два рисунка среднего ряда) в численных экспериментах

С.О. Белоцерковского и натурные снимки моделирования их в лабораторных условиях.

В действительности критерием Мешалкина–Синяя о глобальной устойчивости течения Колмогорова открывается новая группа параметров гидродинамической устойчивости, так называемые крупномасштабные параметры (их список начинается с главного фактора): в отличие от соответствующих мелкомасштабных параметров (их возглавляет число Рейнольдса), новые параметры уже не зависят от вязкости и теплопроводности среды.

## Лекция 5

### Очерк 16. Когерентные структуры

Что нового приносят с собой в динамику жидкости и газа неустойчивости, переходящие в турбулентность?

Первым нашел ответ на этот вопрос в 1887 году Уильям Томсон (Кельвин). Но его открытие сил турбулентности оказалось несвоевременным. На эти силы обратили внимание только спустя 8 лет благодаря рекламе из подкрашенных струй О. Рейнольдса: в теоретической части своей работы о подкрашенных струях Рейнольдс выводит те же 9 сил, что и Томсон, которые действуют на координатные площади локальной системы декартовых ортогональных координат, помещенных в любую точку турбулентного потока.

Если отнести величины этих сил к величинам тех площадей, к которым они приложены, то получим так называемые напряжения. Если поделить их затем на плотность среды в данной точке, то получим удельные напряжения, т.е. напряжения, приходящиеся на единицу массы среды.

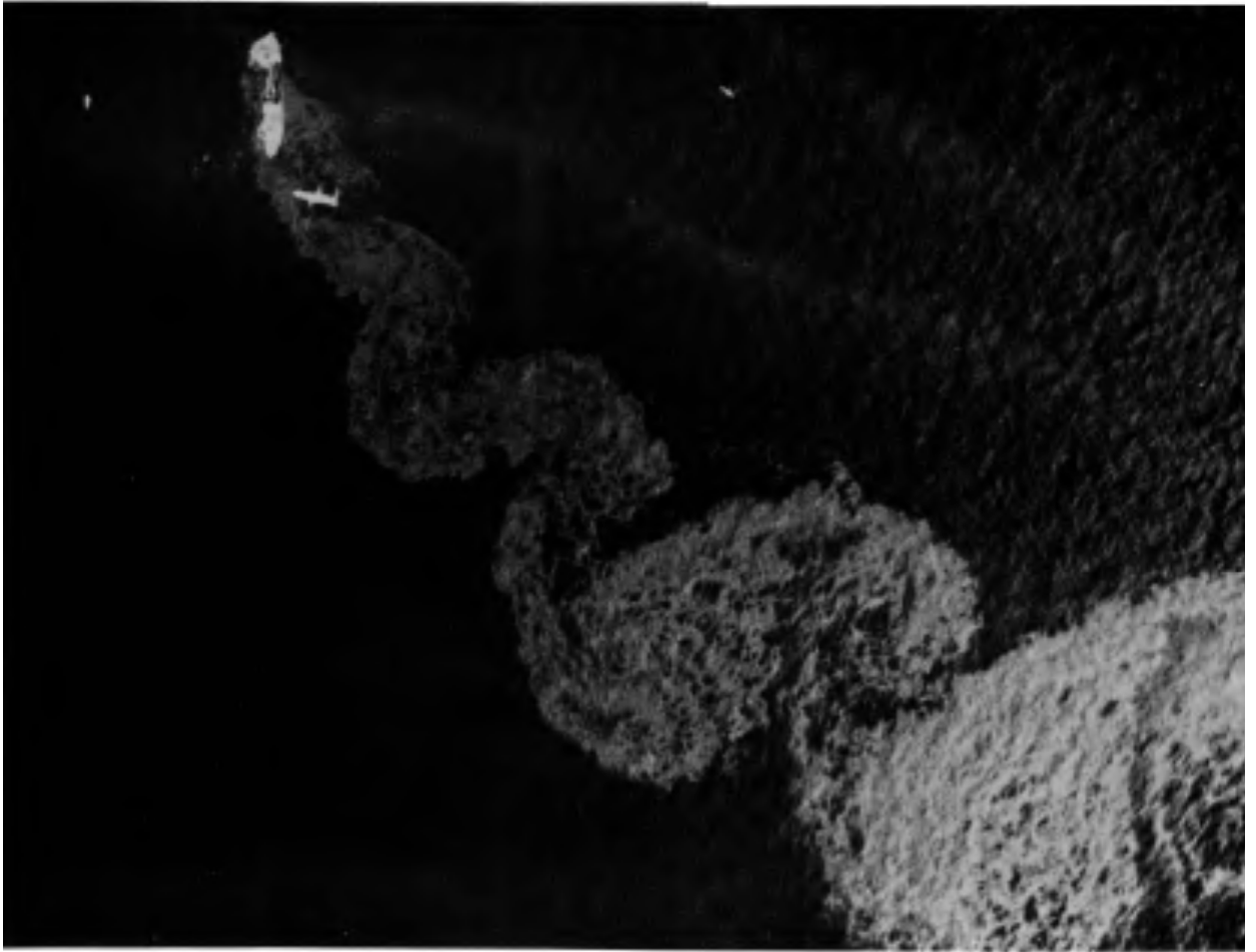
Удельными напряжениями, производимыми пульсациями вектора скорости, или турбулентными напряжениями, у Томсона и Рейнольдса оказываются парные произведения пульсаций компонент скорости, осредненные по гексаэдру, как ячейке воображаемой периодической решетки в пространстве (у Томсона) или по общему выделенному объему (у Рейнольдса).

Впоследствии 9 турбулентных напряжений пульсирующей среды – 3 нормальных напряжения, производимые осреднением одноименных компонентами скорости, и 6 касательных напряжений, производимых осреднением разноименных компонент, – научились измерять. Они оказались значительно меньше величин, производимых динамическими напряжениями, доставляемыми произведениями компонент осредненной скорости. Однако главным при этом оказалось их не простое взаимодействие с осредненным потоком (со средней скоростью), все еще не выясненное в полной мере.

Вместе с вязкими напряжениями Навье–Стокса турбулентные напряжения Томсона–Рейнольдса дополняют силу Эйлера до равновесия с силой Паскаля в вязкой и турбулентной среде.

Иначе говоря, в турбулентной среде сохраняется равновесие сил Эйлера и Паскаля с поправкой на силы вязкости и турбулентные напряжения.

Поэтому не удивительно, что за танкером, севшим на мель в бурлящем водном потоке (с огромным числом Рейнольдса, Рисунок 29), остается след, похожий на вихревую дорожку Фон Кармана, образуемую следом за цилиндром, обтекаемым ламинарной средой (Рисунок 30).



173. След за танкером, севшим на мель. Танкер «Argo Merchant» в 1976 г. сел на мель вблизи Нантакета. Вытекающая из него сырая нефть позволяет видеть, что судно оказалось наклоненным к морскому течению под углом  $45^\circ$ . Хотя число Рей-

нольдса равно примерно  $10^7$ , однако структура следа удивительно похожа на то, что показано на предыдущем снимке. Фото NASA, любезно предоставлено O. M. Griffin, Naval Research Laboratory

Рисунок 29 – Когерентная структура: нефтяной след за танкером в турбулентном потоке.

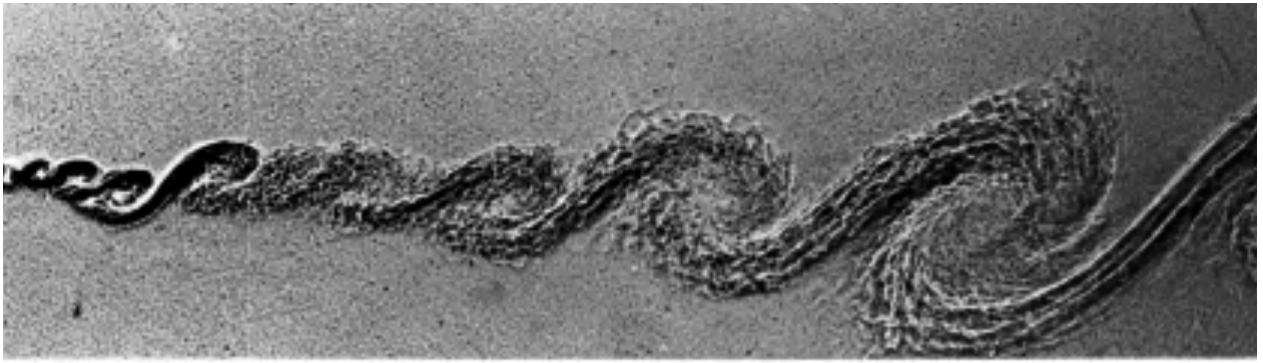


94. Вихревая дорожка Кармана за круговым цилиндром при  $Re = 140$ . Вода обтекает цилиндр диаметром 1 см со скоростью 1,4 см/с. Визуализация движения осуществляется так: частицы метятся белым коллоидным дымом, создаваемым элек-

тролитическим способом и освещаются световым ножом. Видно, что по мере продвижения вниз по потоку на несколько диаметров ширина вихревой пелены возрастает. Фото Sadatoshi Taneda

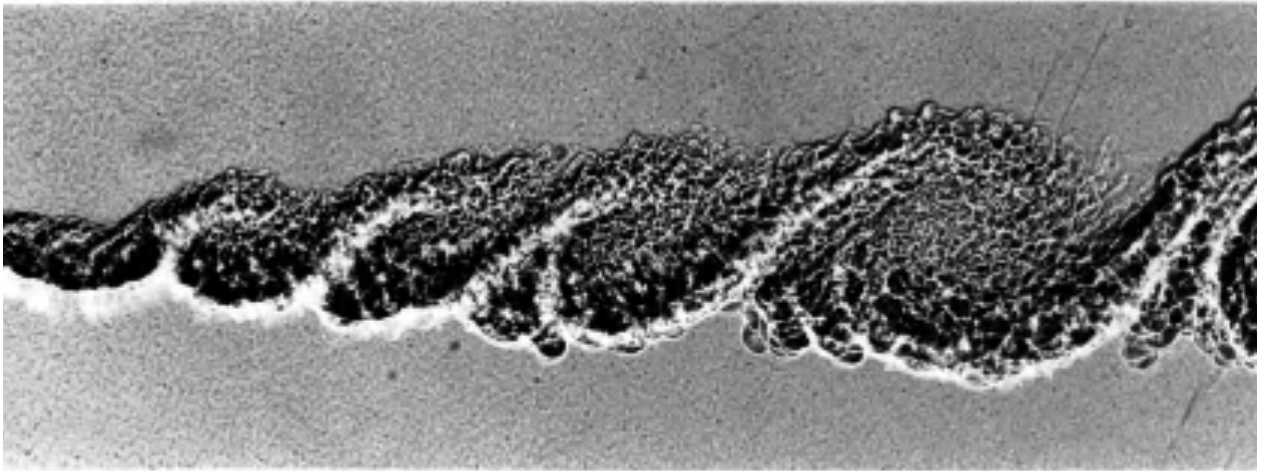
Рисунок 30 – Вихревая дорожка Фон Кармана, образуемая следом за цилиндром, обтекаемым ламинарным течением.

Турбулентный сдвиговой слой приводит к вихрям неустойчивости (Рисунок 31), напоминающим вихри неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (Рисунок 21).



176. Крутомасштабная структура в турбулентном слое смешения. Азот, находящийся сверху и текущий со скоростью 1000 см/с, перемешивается под давлением 4 атм со смесью аргон–гелий, находящейся снизу, имеющей ту же плотность и текущей со скоростью 380 см/с. Сделанная искровым методом теневая фотография показывает одновременно течение в плане и сбоку, демонстрируя пространственную структуру больших вихрей. Поло-

ски, вытянутые вдоль потока, на фотографии течения в плане (здесь показана лишь половина снимка в ширину) соответствуют системе вторичных вихревых пар, ориентированных в направлении по потоку. Расстояние между ними в части слоя, расположенной вниз по потоку, больше, чем вблизи начала. Фото J. H. Konrad, Ph. D. Thesis, Калифорнийский технологический институт, 1976



177. Когерентная структура при большом числе Рейнольдса. Течение аналогично показанному на предыдущем снимке, но соответствует вдвое большему давлению. Увеличение числа Рейнольдса вдвое приводит к росту числа мелкомасштабных

структур без существенного изменения крупномасштабной структуры. M. R. Rebollo, P. D. Thesis, Калифорнийский технологический институт, 1976. [Brown, Roshko, 1974]

Рисунок 31 – Когерентная структура: крупные вихри сдвигового турбулентного слоя, напоминающие вихри Кельвина–Гельмгольца (Рисунок 21).

## Очерк 17. Турбулентные волны

Когерентные структуры – свидетельство наличия сильного, и, как часто добавляют, нелинейного взаимодействия турбулентных напряжений пульсаций с осредненным потоком. Если ослабить это



взаимодействие малыми возмущениями, то получатся линейные турбулентные волны.

Скорость распространения таких волн определяется квадратным корнем удельной (отнесенной к плотности) энергии пульсаций, которая составляет обычно несколько процентов от общей механической энергии крупномасштабного движения пульсирующей среды. Но здесь важна не величина этой скорости, но само существование последней.

Как хорошо известно из акустики, или из газовой динамики малых возмущений сжимаемой среды, вместе со скоростью звука мы получаем и направления распространения в пространстве с указанной скоростью волн малых возмущений покоящейся среды.

В общем случае (подвижной или неподвижной среды) эти направления отыскиваются из так называемого характеристического уравнения. Последним определяется фаза волны – положение возмущения в пределах одного периода.

Коэффициенты в характеристическом уравнении определяются величинами компонент скорости, давления и плотности. Решив это уравнение, мы получаем фазу волны, как функцию времени и трех координат. Тогда поверхность, в пределах которой фаза волны не меняет своего значения, или характеристика, описывает движущийся фронт волны. Этим фронтом и переносятся малые возмущения среды в пространстве.

Вместе со скоростью турбулентных волн, осредненная турбулентная среда тоже обретает характеристическое уравнение. Коэффициенты в нем вычисляются по 3–м компонентам средней скорости и 9–ти напряжениям пульсаций. Остается найти задачу, которая помогла бы в валидации (опытном подтверждении) существования турбулентных характеристик.

Такая задача уже давно существует в приложениях. Она всегда стоит несколько особняком от других задач (вероятно, – из-за

недостатка теории). Речь идет о ближнем участке плоской затопленной турбулентной струи, вытекающей из канала, где уже установился характерный и практически прямоугольный профиль осредненной скорости.

Прямоугольник этого профиля на выходе из канала превращается в трапецию, вершины которой начинают расходиться (по мере сноса вниз по потоку) так, что ее нижнее основание равномерно расширяется, а верхнее сужается под определенными и различными углами (Рисунок 31). Величины углов практически универсальны, но не поддаются объяснению, исходя из традиционных подходов.

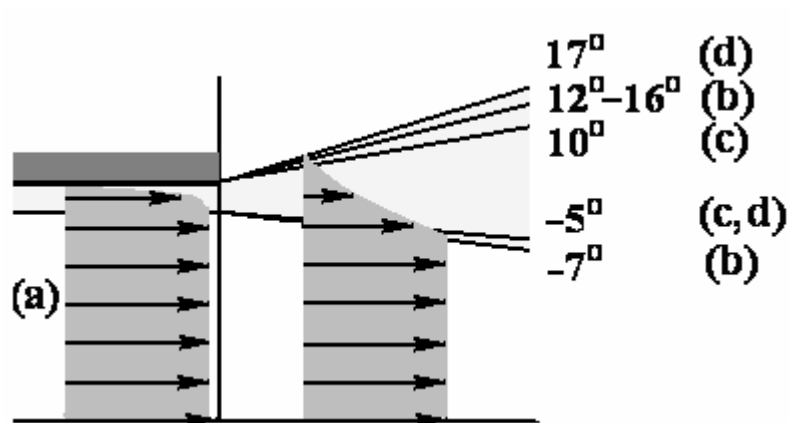


Рисунок 32 – Установившийся у выхода плоском канала почти прямоугольный профиль осредненной скорости Ж. Конт–Белло (а), и углы расхождения трапецевидного профиля, в который тот переходит в ближнем участке затопленной турбулентной струи, измеренные Г.Н. Абрамовичем (b) и Л.Г. Лойцяным (с). Последние сравниваются с углами, определяемыми турбулентными характеристиками (d), порождаемыми коэффициентами, определяемыми измеренными Конт–Белло профилями средней скорости и напряжений пульсаций внутри канала.

Между тем, представим, что возмущения распространяются по турбулентным характеристикам, подставим в характеристическое уравнение коэффициенты, измеренные Ж. Конт–Белло для течения в канале. В результате получим примерно те же углы расхождения трапецевидного профиля струи, что измерены и у Г.Н. Абрамовича и Л.Г. Лойцянского (Рисунок 32).

Далее, оказывается, что в однородно и изотропно турбулизованном ядре пульсирующей среды, покоящейся в среднем, структура турбулентных волн формально идентична доставляемой электромагнитным полем.

Иначе говоря, осредненные и линеаризованные классические законы сохранения в пульсирующей среде принимают форму уравнений Максвелла, а движение взвешенной частицы в этой среде приводит к силе Лоренца.

Приведенными замечаниями мы и ограничимся.

## **Очерк 18. Диссипация механической энергии**

С молекулярного движения гидродинамика начинается (в виде производимой им выталкивающей силы), им же она и заканчивается, переходя в раздел теплофизики благодаря диссипации механической энергии, при которой мелкие вихри нагревают окружающую среду, т.е. отдают свою механическую энергию тепловому движению молекул.

Величина работы, каждую секунду затрачиваемая на увеличение энергии турбулентного перемешивания, идущей на это нагревание, за вычетом неизбежных тепловых потерь, может быть точно определена в любом объеме с помощью все тех же законов сохранения, но теперь уже – с учетом вязкости и теплопроводности среды.

Ее же можно измерить работой силы тяжести, как это сделал в 1850 году Джеймс Прескотт Джоуль.

Невидимой, но главной частью установки Джоуля по нагреванию воды путем ее перемешивания в теплоизолированном сосуде служит крутящаяся система решеток, необходимая для максимально возможной турбулизации потока внутри сосуда (чтобы создать как можно больше мелких вихрей), изображенная на Рисунке 33.

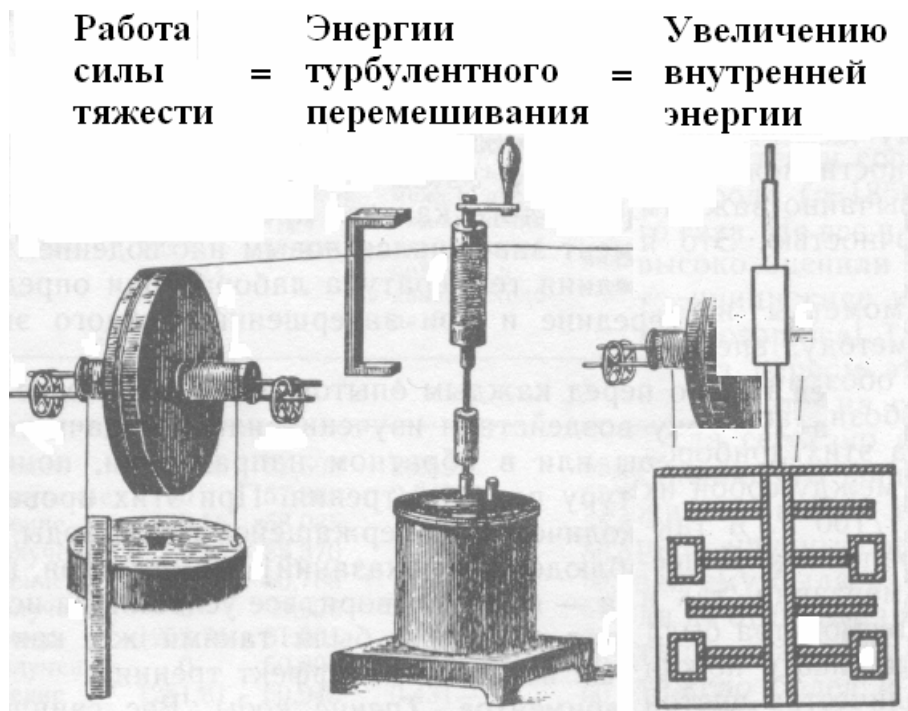


Рисунок 33 – Опытная установка Джоуля по измерению механического эквивалента тепла в теплоизолированном сосуде путем турбулентного перемешивания воды с помощью решеток, вращаемых опускаемыми грузами.

Решетки раскручиваются (с помощью блоков и веревок) опускающимися грузами. Зная вес и высоту, на которую опускаются грузы при многократном повторении опыта, нетрудно вычислить и совершаемую работу по перемешиванию. Одновременно измеряя возрастающую при этом температуру воды, Джоуль нашел ее скорость пропорциональной затраченной работе.

Так и был измерен впервые механический эквивалент тепла, называемый теперь теплоемкостью при постоянном объеме.